

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND V, HEFT 1

MIT 41 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 2. FEBRUAR 1951)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1951

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 — 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die *Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)*
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Druckweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band V, Heft 1

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.

	Seite
C. L. Kober, Störung und Störfreiung von Rückstrahlung in Wellenfeldern. (Mit 4 Textabbildungen.)	1
K. H. Beck, Diodengleichrichtung bei Zentimeter-Wellen. Doehler-Effekt. (Mit 6 Textabbildungen.)	11
J. Dörr, Bemerkung zur Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe mit starren, gelenkig verbundenen Randstäben. (Mit 1 Textabbildung.)	34
W. Glaser und H. Robl, Apertur und Blenden magnetischer Übermikroskope. (Mit 8 Textabbildungen.)	36
G. Kraus, Ein Umkehrungssatz in nichtlinearen Wechselstromschaltungen. (Mit 17 Textabbildungen.)	48
R. Goldberger de Buda, Zur Frage der Entzerrung eines Impulsverstärkers	74
M. Z. Krzywoblocki, On the So-Called Principle of Least Work Method. (With 5 Figures.)	81

Berichte.

H. Parkus, Die überkritische Unterschallströmung	97
--	----

Buchbesprechungen.	97
--------------------	----

Baudisch, K., Energieübertragung mit Gleichstrom hoher Spannung (H. Sequenz). — Eck, B., Technische Strömungslehre (F. Magyar). — Föppl, L. und E. Mönch, Praktische Spannungsoptik (H. Parkus). — Göhring, O., Schornsteine (M. Szombathy). — Hertwig, A., Leben und Schaffen der Reichsbahn-Brückenbauer Schwedler, Zimmermann, Labes, Schaper (E. Melan). — Leitner, F. und E. Plöckinger, Die Edeltahlerzeugung (A. Leon). — Melan, E., Einführung in die Baustatik (K. Federhofer). — Metallurgical Applications of the Electron Microscope (W. Glaser). — Electromagnetic Theory (W. Glaser). — Roth, A., Hochspannungstechnik, 3. Aufl. (W. Gauster). — Stini, J., Tunnelbaugeologie (A. Kieslinger). — Tölke, F., Praktische Funktionenlehre (F. Magyar). — Valentin, W., Diagramme, Einflußlinien und Momente für Durchlaufträger und Rahmen (W. Mudrak). — Wightman, W. P. D., The Growth of Scientific Ideas (E. F. Petritsch).

Störung und Störfreiung von Rückstrahlung in Wellenfeldern.

Von C. L. Kober, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Fußend auf der neuen thermodynamischen Betrachtungsweise von Beugungserscheinungen zur Berechnung des Rückstrahles beliebig geformter Reflexionskörper wird zunächst eine Theorie der statistischen Eigenschaften des Rückstrahlspektrums gegeben. Als Anwendung ergibt sich die Theorie der Störung von Funkmeßgeräten mittels Störkörpern oder Rauschsendern, wie sie im letzten Kriege durchgeführt wurde; eine Auswertung der Schwankungseigenschaften des Spektrums zeigt die gangbaren Möglichkeiten einer Entstörung. Diese wurde auch experimentell in zahlreichen Formen verifiziert. Weitere Anwendungen der Theorie führen zu Berechnungsgrundlagen des elektrischen Fernsehens mittels Radartechnik, das heißt Bilddarstellung eines Zieles durch Bilderlegung des Rückstrahles nach dem Fernsehprinzip, sowie eine kritische Betrachtung über den Wert und die Grenzen von sehr großen Antennengebilden zur Ausblendung von Störern.

Summary. Viewing the diffraction phenomena from the novel thermodynamical angle which permits of calculating the radiation reflected by reflecting bodies of any shape, first of all a theory has been evolved on the statistical properties of the spectrum of reflexion. From that theory another theory has been derived on the perturbation of radio measuring instruments by means of perturbing bodies or jamming transmitters, as already employed in the last war. The exploitation of the fluctuation properties of the spectrum opens the path to the possibility of eliminating the perturbances in a practical manner which has already been verified for many different shapes. Further applications of this theory lead to fundamental principles of calculation for electrical television by means of the radar technique i.e. representation of an object by decomposing the reflected rays according to the television principle. Finally certain considerations have been put forth on the value and the limits of use of very sizable antennas for choking perturbators and jamming stations.

Résumé. Envisageant les phénomènes de diffraction d'un point de vue thermodynamique nouveau, permettant de déterminer par le calcul le rayonnement réfléchi par des corps de forme quelconque, on a d'abord établi une théorie des propriétés statistiques du spectre du rayon réfléchi. Comme application on en déduit la théorie des perturbations des émetteurs radioélectriques au moyen de perturbateurs ou d'émetteurs brouilleurs comme on le pratiquait pendant la dernière guerre; l'évaluation numérique des fluctuations dans le spectre montre la possibilité de parvenir à l'élimination du brouillage. Ceci fut également vérifié expérimentalement pour des formes très nombreuses. D'autres applications de la théorie conduisent aux principes de calcul fondamentaux de la télévision au moyen de la technique du radar, c'est à dire représentation d'un objet par décomposition du rayon réfléchi selon les principes de la télévision; on a enfin donné quelques considérations critiques sur l'intérêt et les limites d'utilisation d'antennes, très importantes pour „l'étouffement“ des perturbateurs.

I. Aufgabenstellung.

In einer früheren Arbeit¹ wurde mittels des Begriffes des Freiheitsgrades eine Theorie des Rückstrahles von Reflexionskörpern in akustischen oder elektrischen Wellenfeldern gegeben, deren Leistungsfähigkeit sich auf die Erfassung der Größe des Rückstrahles erstreckte.

¹ C. L. Kober: Österr. Ingenieur-Arch. Bd. IV, H. 3, S. 235.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Bereich der Theorie erweitert: Durch Betrachtung der Schwankungserscheinungen des Impulsspektrums wird eine Theorie der möglichen Störungen und der Maßnahmen zur Störbefreiung der Rückstrahlung gegeben; hierbei ergeben sich als Nebenresultate interessante Anwendungen auf das Problem des elektrischen Fernsehens mittels Abtastung des Objektes mittels eines räumlich und zeitlich gebündelten Wellenstrahles. Ferner kann der Anschluß an die Theorie der optischen Abbildung und die des Elektronenmikroskops vollzogen werden.

Es liegt im Wesen der bisher benützten thermodynamischen Betrachtungsweise, nun auch statistische Methoden einzuführen, die erstmalig eine Erfassung des Begriffes Störung durch den Begriff der statistischen Schwankung ermöglicht; es sei darauf verwiesen, daß mittels der so gewonnenen Formeln auch eine Theorie der akustischen Geräusche gegeben werden kann. So z. B. ist die abgeleitete Formel für die Größe der Strahlungswirkung von N -Dipolen auf eine Antenne bestimmter Größe unmittelbar übertragbar auf das Problem: Welche Lautstärke erzeugen N -Geräuschquellen bestimmter Bandbreite und Schalleistung und gegebener Dimensionen auf einem Schallempfänger bestimmter Größe. Jedoch soll in vorliegender Arbeit auf diese Fragen nicht eingegangen werden, wenn auch alle Unterlagen zur Beantwortung dieser Fragen erarbeitet werden.

II. Strahlungsschwankungen und Modulationstheorie des reflektierten Impulses.

1. Schwankungen im Impulsspektrum.

Wir betrachten die speziellen Eigenschaften von Störungen, wie sie etwa durch in das Wellenfeld eingelagerte Fremdkörper realisiert werden. Diese können mannigfaltiger Art sein. So z. B. wurden während des Krieges bekanntlich Störungen des Funkmeßbetriebes durch Abwerfen von Metallstreifen erzielt; aber auch die Natur sorgt für das Auftreten von „Scheinreflexionen“, z. B. durch meteorologisch bedingte Reflexionen, hervorgerufen durch starke Strahlenkrümmung infolge hohen Wasserdampfgehaltes der Luft oder Vorhandensein von Inversionsschichten in der Troposphäre, wodurch Reflexionen an der Land- oder Meeresoberfläche auftreten, obwohl sie als Ziel nicht in der geometrischen Zielrichtung des Gerätes liegen. Besonders bei der durch die heutigen Flugzeuggeschwindigkeiten bedingten Anwendung von Grenzleitungssendern von mehreren Megawatt Senderleistung für Funkmeßgeräte ergibt sich die erstaunliche Tatsache, daß wenigstens in der Nähe des Gerätes die normale Luft schon „optisch trüb“ wird, das heißt schon geringste Wellenwiderstandsschwankungen dieses Raumes, bedingt durch z. B. Temperatur- oder Feuchtigkeitsunterschiede, Anlaß zu Reflexionen geben.

In viel stärkerem Maße sind diese Erscheinungen bekanntlich bei der Ultrarotstrahlung in atmosphärischer Luft vorhanden, da der UR-Störpegel derselben wesentlich höher liegt als der elektrische. Dadurch, daß gerade im UR-Bereich solcher Geräte die Eigenschwingungen des atmosphärischen Kohlenstoffes usw. liegen, verstärken sich hier die Erscheinungen derart, daß daran bisher eine ähnlich weitgehende Anwendung der UR-Strahlen wie die der elektrischen gescheitert ist.

Deshalb ist eine prinzipielle Untersuchung der Störungen und der Entstörungsmöglichkeiten von größter Wichtigkeit.

Nur am Rande sei das dornenvollste Problem der drahtlosen Nachrichtenübertragung, das der Störbefreiung von atmosphärischen Störungen, hier erwähnt, wenn auch in vorliegender Arbeit über die Störbefreiungsmöglichkeiten nur kurz gesprochen werden soll. Dies ist nur zum Teil ein Reflexions- und Impulsproblem. In einer späteren Arbeit soll auch über dieses Problem berichtet werden.

Betrachten wir nun eine „Wolke“ von Störreflektoren der Zahl N , unregelmäßig verteilt im Abstand

$$r - dr/2 \quad \text{bis} \quad r + dr/2$$

vom Funkmeßgerät, innerhalb eines Raumwinkels, also ein Wolkenvolumen

$$r^2 \Delta\Omega \, dr$$

erfüllend.

Die Erregung des k -ten Störreflektors werde beschrieben durch

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} s Q_{ks} e^{-j\pi s t/T} \quad (1)$$

wo T die Impulsfolgefrequenz, also die Anzahl der hochfrequenten Impulse pro Sekunde repräsentiere. In Abb. 1 ist ein Impulsspektrum eines selbstschwingenden, impulsmodulierten Senders dargestellt: Die Umhüllende des Spektrums, die dem niederfrequenten Spektrum des Tastmodulationsimpulses entspricht, hat ihr Maximum bei der Trägerfrequenz; diese selbst ist jedoch nicht realisiert, vielmehr sind die einzelnen Linien in der Hochfrequenz nichts anderes als Multipla der niederfrequenten Tastfrequenz. Nur bei fremdgesteuerten Impulssendern ist die Trägerfrequenz realisiert und links und rechts von ihr folgen im Abstand jeweils der Tastfrequenz die Seitenbandfrequenzen. Somit ist, da heute fremdgesteuerte Impulssender noch nicht benützt werden, Gl. (1) mit einer komplexen Amplitude Q_{ks} die Darstellung eines selbsterregten Impulssenders.

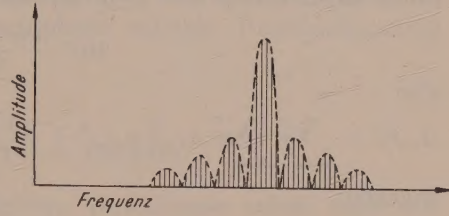


Abb. 1.

Berücksichtigen wir die verschiedenen Phasen der beim Funkmeßempfänger ankommenden Empfangswellen infolge der verschiedenen zurückgelegten Wege durch die „Reisezeit“

$$t_k = r_k/c,$$

so wird das Impulsbild der Störerwolke dargestellt durch:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_{ks} e^{-j\frac{\pi s}{T}(t-t_k)} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{\pi s t}{T}} \sum_{k=1}^N a_{ks} e^{+j\frac{\pi s t_k}{T}} \quad (2)$$

Die Linie ν berechnet sich zu $s/2T$. Die Energie der Frequenz $s/2T$ des Spektrums ist gegeben durch Multiplikation der Amplitude

$$A = \sum_{k=1}^N a_{ks} e^{j\frac{\pi s}{T}t_k}$$

mit ihrer komplex Konjugierten $\tilde{A}$:

$$J_s = A_s \tilde{A}_s = \sum_k \sum_s a_{ks} \tilde{a}_{ls} e^{+j\frac{\pi s}{T}(t_k - t_l)} \quad (3)$$

Ferner für eine abweichende Frequenz $\nu' = s'/2T$:

$$J_s J_{s'} = \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n a_{ks} \tilde{a}_{ls} a_{ms} \tilde{a}_{ns} \exp \left\{ j \frac{\pi s}{T} \times \right. \\ \left. \times [s(t_k - t_l + t_m - t_n) - (s - s')(t_m - t_n)] \right\} \quad (4)$$

Dabei variieren die $t_1 \dots t_k$ im Intervall

$$\tau = \Delta r/c; \quad (t_k = r_k/c + \tau); \quad -\tau/2 < \tau_k < +\tau/2$$

und $t = r/c$. Dann wird in (3) der Mittelwert

$$\frac{1}{\tau^2 - \tau/2} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} dt_k dt_e e^{\frac{j\pi s}{T}(t_k - t_e)} = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi s \tau}{2 T}\right)}{\left(\frac{\pi s \tau}{2 T}\right)^2} & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}$$

Nun ist stets $\nu \tau \gg 1$ für alle betrachteten λ der Funkmeßgeräte und Störwolken. Dann liegen auf der Strecke Δr viele $\lambda = c/\nu$; in diesem Falle ist der Mittelwert der Glieder $k \neq l$ gegen die Glieder $k = l$ zu vernachlässigen und wir erhalten aus (3)

$$\bar{J} = \sum_k |a_{ks}|^2. \quad (5)$$

Ferner ist $\nu \tau$ und $\nu' \tau' \gg 1$, ohne daß dies für $(\nu - \nu') \tau$ gilt, so bleiben in (4) beim Mitteln nur die Summanden erhalten, für die $k = l$ und $m = n$ ist mit dem Wert 1, sowie Glieder $k = n$; $l = m$ mit dem Wert

$$\sin^2 \frac{\pi (s - s') \tau}{2 T} \bigg/ \left\{ \frac{\pi (s - s') \tau}{2 T} \right\}^2,$$

also:

$$\overline{J_s J_{s'}} = \sum_k \sum_m |a_{ks}|^2 |a_{ms}|^2 + \frac{\sin^2 \{ \pi (s - s') \tau / 2 T \}}{\{ \pi (s - s') \tau / 2 T \}^2} \sum_k \sum_l a_{ks} \bar{a}_{ls} a_{ls} \bar{a}_{ks} \quad (6)$$

dagegen:

$$\overline{J_s \cdot J_{s'}} = \sum_k \sum_m |a_{ks}|^2 |a_{ms}|^2.$$

Wären J_s und $J_{s'}$ voneinander völlig unabhängig, müßte bekanntlich

$$\frac{\overline{J_s J_{s'}}}{\overline{J_s} \cdot \overline{J_{s'}}} = 1 \quad (7)$$

sein. Nun weicht dieser Quotient um die $\sin^2$ -Funktion vom unabhängigen Werte ab. Nullstellen der $\sin^2$ -Funktion geben daher die Stellen der Unabhängigkeit an, das heißt bei

$$|\nu - \nu'| = c/\Delta r. \quad (8)$$

Bei wachsender Differenz tritt wieder Abhängigkeit auf, bis zur nächsten Nullstelle. Das Spektrum wird dadurch in die Zahl von

$$\frac{\Delta r}{c} \Delta \nu = \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \Delta r. \quad (9)$$

Spektralbereiche eingeteilt, die voneinander durch die Störwolke unabhängig moduliert werden; das heißt Gl. (9) ist die Anzahl der von der Störwolke ausgehenden Störmodulationsbänder im Spektrum.

2. Entstörung mit zwei Arbeitsfrequenzen.

Auf den Erkenntnissen der vorhergehenden Analyse hat man nun eine Störfreierungsmethode aufgebaut, die, realisiert, bei kleineren Störungsgraden recht erfolgreich war.

Man strahlt die Störwolke und das zu isolierende Ziel mit zwei Frequenzen ν und ν' an. Es ist dabei gleichgültig, ob das Ziel sich innerhalb oder außerhalb der Störwolke befindet.

Man kann dieselbe Methode auch bei der zerstörungslosen Werkstoffprüfung mittels Ultraschallimpulsen zur Unterscheidung kleinerer oder größerer Materialinhomogenitäten von Rissen, Lunker u. dgl. verwenden.

Eine Anstrahlung mit den Frequenzen ν und ν' ergibt bei genügend großem $\nu - \nu'$ zwei unabhängige Spektren und damit verschiedene Impulskurvenformen des Ziel-

rückstrahles K_1 und K_2 beim Funkmeßbetrieb, so daß die Spannungsdifferenz der beiden Impulse desselben Zieles auf zwei verschiedenen Wellenlängen

$$K_1 - K_2 \neq 0$$

ist. Die so erhaltene Spannung kann z. B. zur Dunkelsteuerung der Oszillographen-Anzeige verwandt werden; allerdings verschwindet bei großen Störungsgraden dann das Zielbild auch völlig. Deshalb ist nur bei schwacher Störung diese Methode verwendbar.

Erfahrungsgemäß [sowie nach Gl. (8)] erzeugt nämlich ein räumlich eng begrenztes Ziel, wenn $\nu - \nu'$ nicht allzu groß ist, gleiche Rückstrahlimpulse, so daß dann $K_1 - K_2 = 0$ ist, diese Anzeige also durch Hellsteuerung der Oszillographenanzeige tatsächlich die Störfreiung ungeändert passiert.

Berechnen wir nun die nötige Größe $\nu - \nu'$, um eine Störfreiung zu erzielen. Sie hängt von der Größe der Störwolke ab, ein Umstand, der uns später zu Betrachtungen über das Problem des elektrischen Fernsehens mittels Impulsabtastung führen wird.

Sei z. B. $\Delta r = 2 \cdot 10^3$ m, so wird

$$|\nu - \nu'| = \frac{c}{\Delta r} = \frac{3}{2} \frac{10^8}{10^3} = \frac{3}{2} 10^5 = 150 \text{ kHz.}$$

Dies ist jedoch die erste spektrale Nullstelle. Sichere Verhältnisse erhält man erst bei höheren, z. B. der 5. Nullstelle, also $\nu - \nu' = 750$ kHz. Für ein Flugzeug z. B., als Kollektiv von N -Resonatoren mit $\Delta r = 10$ m wird

$$|\nu - \nu'| = 3 \cdot 10^7 = 30 \text{ MHz.}$$

Hierauf beruht die Erfahrung, daß $K_1 - K_2 = 0$ ist für räumlich eng begrenzte Rückstrahlmannigfaltigkeiten.

Man kann daher diese Methode, die mit dem Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen räumlichen Tiefe von Störziel und Nutzziel arbeiten, nur bei entsprechend großem Kontrast der räumlichen Dimensionen verwenden, also z. B. bei allen Arten von meteorologischen Scheinzielen.

3. Wirkung der unregelmäßigen Störstrahlungsverteilung auf die Antennenerregung ausgedehnter Empfangsantennen.

Betrachten wir eine räumlich ausgedehnte Antenne und auf ihr zwei Punkte P und P' , so herrschen dort die Erregungen

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_k^N a_k e^{j(\delta_k + \kappa r_k)}; & A' &= \sum_k^N a_k e^{j(\delta_k + \kappa r'_k)}, \\ \delta_k &= \text{Phase}; & \kappa &= 2\pi/\lambda, \\ J &= A \tilde{A} = \sum_k \sum_l a_k a_l l, & & \left. \begin{aligned} & j(\delta_k - \delta_l) + j\kappa(r_k - r_l), \\ J J' &= A \tilde{A} A' \tilde{A}' = \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n a_k a_l a_m a_n \exp \{ j(\delta_k - \delta_l + \delta_m - \delta_n) + \\ & \quad + j[\kappa(r_k - r_l + r_m - r_n)] \}. \end{aligned} \right\} (10) \end{aligned} \right\}$$

Wir summieren über viele Phasen δ_k , so bleiben in $\bar{J}$ nur die Glieder mit $k = l$ stehen, so daß

$$\bar{J} = \sum_k |a_k|^2 \quad (11)$$

wird. $\overline{JJ'}$ enthält nur die Summenglieder $k = l$ und $m = n$ mit dem Wert $= 1$ und die Glieder $k = n$ und $l = m$ mit dem Faktor

$$\exp \{j \kappa [(r_k - r_k') - (r_l - r_l')]\},$$

also

$$\overline{JJ'} = \sum_k \sum_m |a_k|^2 |a_m|^2 + \sum_k \sum_l |a_k|^2 |a_l|^2 \exp \{j \kappa [(r_k - r_k') - (r_l - r_l')]\}. \quad (12)$$

Dagegen gilt

$$\overline{J} \cdot \overline{J'} = \sum_k \sum_m |a_k|^2 |a_m|^2. \quad (13)$$

Nun muß die Antenne näher in die Rechnung eingeführt werden; P und P' liegen auf einer ebenen Fläche f . P habe die Koordinaten $\xi = 0$ und $\eta = 0$, P' die Koordinaten ξ, η . Die Störwolke $r^2 \Delta r \Delta \Omega$ hat von P aus die Richtungskosinus $\cos \Theta$, so daß

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta \alpha \Delta \beta}{\cos \Theta} = \frac{\Delta \alpha \Delta \beta}{\gamma}, \quad (14)$$

wo Θ der Einfallswinkel zwischen der Richtung $\alpha \beta \gamma$ und der Flächennormale von f (Peilung 0) ist. Die Störreflektoren haben jeder für sich die Richtungskosinus $\alpha_k \beta_k \gamma_k$, wobei

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha + a_k; & -\Delta \alpha/2 < a_k < +\Delta \alpha/2; \\ \beta_k &= \beta + b_k; & -\Delta \beta/2 < b_k < +\Delta \beta/2. \end{aligned}$$

Nun ist PP' klein gegen r_k , also

$$r_k' - r_k = \xi \alpha_k + \eta \beta_k = \xi \alpha + \eta \beta + \xi a_k + \eta b_k. \quad (15)$$

Berechnet man nun den Mittelwert des Exponentialfaktors innerhalb der Störwolke $+\Delta \alpha/2, +\Delta \beta/2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta \alpha \Delta \beta)^2} \int_{-\Delta \alpha/2}^{+\Delta \alpha/2} \int_{-\Delta \beta/2}^{+\Delta \beta/2} \exp \{j \kappa [(\xi a_k + \eta b_k) + (\xi a_l + \eta b_l)]\} da_k da_l db_k db_l = \\ = \frac{\sin^2(\kappa \xi \Delta \alpha/2)}{(\kappa \xi \Delta \alpha/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(\kappa \eta \Delta \beta/2)}{(\kappa \eta \Delta \beta/2)^2}, \end{aligned}$$

so wird aus Gl. (12), (13)

$$\left. \begin{aligned} \overline{JJ'} &= \sum_k \sum_l |a_k|^2 |a_l|^2 + \frac{\sin^2(\kappa \xi \Delta \alpha/2)}{(\kappa \xi \Delta \alpha/2)^2} \frac{\sin^2(\kappa \eta \Delta \beta/2)}{(\kappa \eta \Delta \beta/2)^2} \times \sum_{k \neq l} |a_k|^2 |a_l|^2, \\ \overline{J} \cdot \overline{J'} &= \sum_k \sum_l |a_k|^2 |a_l|^2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wiederum gilt: Wären J und J' voneinander unabhängig, so wäre:

$$\overline{JJ'} / \overline{J} \cdot \overline{J'} = 1.$$

Ein Maß der Abhängigkeit der einzelnen Erregungen in P und P' ist der Ausdruck

$$\frac{\sin^2(\kappa \xi \Delta \alpha/2)}{(\kappa \xi \Delta \alpha/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(\kappa \eta \Delta \beta/2)}{(\kappa \eta \Delta \beta/2)^2}. \quad (17)$$

Er wird dann und nur dann gleich Null, wenn

$$|\xi| = \frac{2\pi}{\kappa \Delta \alpha} = \lambda / \Delta \alpha; \quad |\eta| = \frac{2\pi}{\kappa \Delta \beta} = \lambda / \Delta \beta$$

gilt. Diese Größen bilden ein Rechteck auf der Antenne, in der die Erregung voneinander abhängig ist.

Ferner ist:

$$\frac{\lambda}{\Delta \alpha} \frac{\lambda}{\Delta \beta} = \frac{c^2}{v^2 \Delta \Omega \cos \Theta}.$$

Die Antenne zerfällt daher in

$$\Delta z = \frac{v^2}{c^2} \Delta f \Delta \Omega \cos \Theta \quad (18)$$

unabhängige Erregungsbezirke, die ein „fleckiges“ Abbild der Störwolke liefern, und zwar ist (18) die Anzahl der Flecken oder Bildelemente auf der Empfangsantenne.

Sei z. B. $\lambda = 1 \text{ m}$; $\Delta \alpha = \Delta \beta = 1/10$; $\Delta f = 30 \text{ m}^2$,
so ist $\Delta z = 0.3$,

also die gesamte Antennenenerregung „fleckelos“ einheitlich und homogen wie bei m-Wellen zu erwarten.

Nimmt man dagegen $\lambda = 10 \text{ cm}$ ($\nu = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$), $\Delta \alpha = \Delta \beta = \frac{1}{10}$; $\Delta f = 10 \text{ m}^2$
so erhält man

$$\Delta z = 10,$$

also schon ein gewisses „strukturelles“ Abbild der Störwolke auf der Antenne, das durch einen geeigneten Abtastschalter auf einen Oszillographen nach Art eines Bildwandlers übertragen werden kann. Natürlich ist dies noch kein Fernsehen, da erst 10 Bildelemente da sind. Bei $\lambda = 1 \text{ cm}$, sonst gleichen Bedingungen erhält man jedoch schon $z = 100$ und hier beginnt prinzipiell das Gebiet des elektrischen Fernsehens. Man kann heute z. B. schon technisch realisierbar die Konturen von Schiffen und anderen größeren Zielen so zur Darstellung bringen. Ebenso gilt dies für die Landkartendarstellung von Flugzeugpanoramaanlagen.

Eine andere Folgerung, die wir schon jetzt ziehen wollen, ist die: Die Bündelung, die eine Antenne durch ihre räumliche Ausdehnung erreichen kann, gilt nur für homogene Erregung. Bei Störwolkenrückstrahlung und m-Wellen hat man tatsächlich mit derselben Antenne die gleiche Bündelung gegen Störwolken wie Flugzeuge gemessen, nicht aber bei cm-Wellen. Dort erscheint die Störwolke peilmäßig größer als in Wirklichkeit, da das „fleckige“ Abbild durch seine Phasenunterschiede die bündelnde Wirkung der Antennenausdehnung schwächt.

Mißt man nämlich bei einer Richtantenne die Halbwertsbreite aus, einmal gegen ein Punktziel, das andere Mal gegen eine Störwolke, so erhält man bei m-Wellen in beiden Fällen dasjenige Resultat, das sich elementar aus der Halbwertsbreite der Antenne und dem geometrischen Abbildungswinkel des Zieles ergibt. Anders bei cm-Wellen: hier herrscht nur bei Punktzielen Übereinstimmung mit der elementaren Überlegung, während bei räumlich stark ausgedehnten Zielen (Störwolken, meteorologische Reflexionen) eine Peilbreite gemessen wird, die beträchtlich größer sein kann als die elementar berechnete. Deshalb versagte teilweise bei cm-Wellen eine Entstörung durch „Ausblenden“ des Störzieles mittels scharfer Bündelung (sogenannte „Methode lange Latte“).

Multipliziert man Gl. (18) mit Gl. (9), erhält man das Gesamtergebn

$$\frac{v^2}{c^3} \Delta r \Delta \Omega \cos \Theta \Delta f \Delta \nu. \quad (19)$$

Dies ist die Anzahl der insgesamt unabhängig variablen Erregungsbezirke, die eine im Volumen $r^2 \Delta r \Delta \Omega$ verteilte Störwolke auf einer Antenne Δf aus der Einfallsrichtung Θ her mit der Bandbreite $\Delta \nu$ erzeugen kann.

4. Das Problem des elektrischen Fernsehens mittels Abtastung durch einen gebündelten Impulswellenstrahl.

Unsere Theorie ist nun imstande, die Grenzen und Bedingungen für das Problem der Darstellung und Abbildung eines Zieles durch Abtastung mit einem räumlich-zeitlich gebündelten m-Wellenzug zu geben.

Wir betrachten nun das Problem der „optisch-elektrischen“ Auflösung.

Damit zwei im Abstande a voneinander entfernte, mit der Frequenz ν reflektierende Rückstrahlobjekte PP' bei einer Abbildung auf einer Ebene als zwei getrennte Bildpunkte erscheinen, muß das betrachtete Urbild eine solche lineare Ausdehnung haben, daß in den Bildpunkten A und B Helligkeitskontraste resultieren können (s. Abb. 2).

Es gilt

$$\sin \Delta\Theta = \Delta\Theta = \frac{b}{r} = \frac{\lambda}{\alpha},$$

also

$$a = \frac{\lambda}{b} r = \frac{\lambda}{\Delta\Theta}$$

der kleinste noch auflösbare Abstand a ; hierzu gehört auch die kleinste noch auflösbare Fläche:

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{\Delta\Theta^2} = \frac{\lambda^2 r^2}{b^2},$$

oder wenn nun $\Delta\Theta^2$ als räumlicher Winkel $\Delta\Omega$ aufgefaßt wird,

$$\Delta f = a^2 = \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega}.$$

Erscheint die Strahlrichtung unter einem Einfallswinkel Θ , so ist $\Delta f \rightarrow \Delta f \cos \Theta$ zu setzen. Also kann man insgesamt

$$\Delta z = \frac{\nu^2}{c^2} \Delta\Omega \Delta f \cos \Theta \quad (20)$$

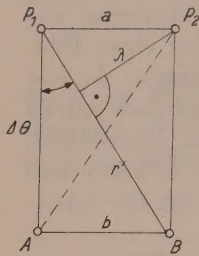


Abb. 2.

verschiedene Elementarbezirke unterscheiden.

Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (19), der Anzahl der „Flecken“ auf einer Antenne, ferner identisch mit der Zahl der Freiheitsgrade, die ein Impulsstrahlbündel besitzt.

Die gleichen Formeln gelten auch für die Objektabbildung mittels Elektronenmikroskops, wenn man für die Wellenlängen die Broglie-Wellenlängen der abbildenden Elektronen einsetzt.

Darnach kann man sofort berechnen, welche Erfolge man mit einem gegebenen Funkmeßgerät (Δf , $\Delta\nu$, ν , $\Delta\Omega$) erzielen kann. Es ist klar, daß man nur mit $\frac{\nu^2}{c^2} \gg 1$ also mit cm-Wellen Resultate erzielt, denn dieses Glied bringt allein numerisch bedeutende Beträge zu einer möglichst hohen Δz -Zahl, also Anzahl der Bildpunkte, die Kontraste liefern.

Man kann also bei entsprechender Bündelung die Umrisse des Zieles abtasten und durch einen als elektrischen Bildwandler arbeitenden Antennenabtastschalter auf einem Oszillographen nach gehöriger Empfangsverstärkung ein Bild erhalten. Δz gibt dann an, wieviel „Graustufen“ wir innerhalb des Zieles erhalten. Diese ist um so größer, je enger die Bündelung ist.

Man kann damit auch dem Problem der Störfreiung gegen Störwolken auf den Leib rücken. Es befinde sich ein Nutzziel innerhalb einer Störwolke. Man macht die Impulse möglichst kurz, z. B. 10 m lang = $\Delta\nu = 10^7$ Hz und eine möglichst enge Bündelung. Wählt man nun $\lambda = 10$ cm, so wird der Kontrast Flugzeug gegen Störuntergrund etwa 10 : 1 sein, wie man aus obigen Formeln leicht errechnet. Eine Bandbreite von 10^7 Hz macht bei den heutigen cm-Verstärkungsröhren keine nennenswerten Schwierigkeiten mehr.

III. Kohärenz und Störphasenmodulation des Rückstrahlimpulses durch Störwolken.

1. Breite der Spektrallinie und Kohärenz des Rückstrahlimpulses.

Eine Störwolke bestehe aus einzelnen Reflektoren, die wieder unregelmäßig verteilt seien und längs der Bahn des Impulswellenzuges den mittleren Abstand $l = k \lambda$ besitzen, so daß die Stördichte durch

$$N/V = n = N/x^3 k^3 \lambda^3; \quad k = \frac{1}{\lambda x} \sqrt[3]{V}; \quad x = \frac{V}{l^3}; \quad (21)$$

gegeben sei.

Dann ist $k \lambda$ die Kohärenzlänge einer Spektralfrequenz, $k/\lambda = \tau$ die Kohärenzdauer der betreffenden Frequenz. Nach je τ Sekunden wechselt die Frequenz im Mittel unregelmäßig ihre Phase.

Ein Flugzeug oder ein anderes räumlich eng begrenztes, geometrisch fest definiertes Ziel stellt eine Mannigfaltigkeit von N -Dipolen dar, die in einem festen Zusammenhang stehend, eine konstante Summenphase ergeben. Diese Mischphase wird bei Bewegung des Rückstrahlkörpers phasenmoduliert, das heißt um einige 10 Hz verschoben. Darauf beruhen alle Doppler-Effekt-Störfreiungsmethoden, die jedoch wegen der Kleinheit dieses Effektes nur gegen geringe Störgrade Wirksamkeit haben, da sonst bei kräftigerer Störung die Breite des Störbandes diesen Effekt überdeckt.

Betrachten wir nun eine Antenne, die in horizontaler Ausdehnung aus p -Dipolen bestehe (Abb. 3), auf die eine Wellenfront W definierter Kohärenzlänge ein falle. Die bündelnde Wirkung der Antenne und damit die Richtungsselektion beruht darauf, daß durch geeignete Zusammenfassung der p -Dipole ein Maximum der Gesamterregung am Zusammenfassungspunkt der Antenne entsteht; das heißt die Erregung muß dann p -mal so groß sein wie bei einem Dipol. Diese Addition der Erregung kommt zustande, indem man je zwei Dipole im elektrischen Abstande einer Wellenlänge zusammenfaßt. Ist L der Abstand zweier Dipole und $m L$ die Phasendifferenz, so wirken zur Erzeugung des Maximums nicht p , sondern nur

$$m \lambda = k \lambda / \cos \Theta \quad (22)$$

Dipole mit, wenn k die Kohärenzlänge der ankommenden Strahlung ist. Ist nun $p = k$, so ist die Antenne „zu breit“, das heißt die Peilcharakteristik gegen das inkohärente Ziel erscheint breiter als es den p -Dipolen entspricht.

Die Charakteristik von p -Dipolen im Abstand L ist gegeben durch

$$C = \sin^2 (\pi p L / \lambda) / (\pi p L / \lambda)^2,$$

die Maxima der Charakteristik liegen bei $L = m \lambda$, die Minima bei

$$L = m \lambda \pm \lambda / p.$$

Dort, wo eine Welle λ ein Minimum ergibt, würde eine Welle

$$\lambda (1 \pm 1/m) = \lambda + \Delta \lambda$$

ein Maximum ergeben. Also

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{m}. \quad (23)$$

Liegen jedoch inkohärente Wellen vor, so beteiligen sich bloß k -Wellen an der skalaren Addition des Maximums, es wirken nur $k/\cos \Theta$ Dipole mit, so daß statt (23)

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \frac{\cos \Theta}{m} = \frac{1}{k}. \quad (23a)$$

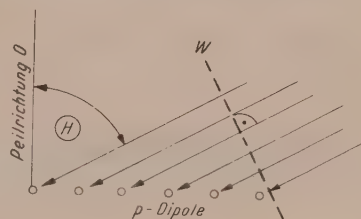


Abb. 3.

gilt. Damit ist auch erklärt, warum man mit Riesenantennen, z. B. 48 Dipolen in einer Zeile, kleinere Störfreiungen erhält, als rechnermäßig zu erwarten. Denn in diesem Falle sind die Störungen über die Nebenmaxima, wo sich die Inkohärenz stark auswirkt, größer als der berechnete Wert.

Betrachtet man den Koeffizienten (23) näher: Ein Wellenzug der Länge k wird beschrieben durch das Fourier-Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi k \left(\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \right)}{\nu_0 - \nu} e^{2\pi j \nu t} d\nu.$$

Die Nullstellen der Spektralamplitude

$$\frac{1}{\pi(\nu_0 - \nu)} \sin \frac{\pi k (\nu_0 - \nu)}{\nu_0}$$

liegen so, daß sie sich um das Hauptmaximum $\nu_0 - \nu$ symmetrisch verteilen, das heißt

$$\nu_0 - \nu = \nu_0/k$$

ist das erste Maximum usw.; das heißt bei einer relativen Änderung

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\Delta \nu}{\nu} \right| = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{1}{k}. \quad (24)$$

Dies steht in Übereinstimmung mit Gl. (23a). Gl. (24) gibt dann auch die spektrale Breite der Linie ν im Spektrum an, das heißt k verbreitert die Linie und diese Verbreiterung muß vom Empfänger übertragen werden können.

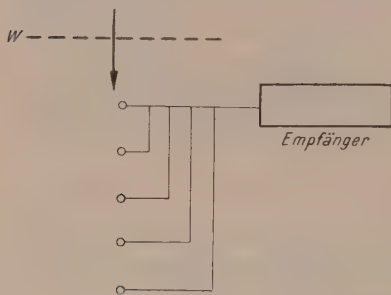


Abb. 4.

2. Kohärenz-Störfreiung.

Auf diesen Erkenntnissen läßt sich ein Störfreiungsverfahren aufbauen, das auch für lange Wellen brauchbar ist und in der Technik der Nachrichtenstörfreiung als „Vielfachantenne“ schon bekannt ist.

Man bedient sich einer p -dipoligen Antennenzeile, die zweckmäßig ihre Längserstreckung in der Peilrichtung besitzt (Abb. 4). Die Erregung jedes Dipols soll nur von dem gerade ihn überstreichenden Wellenzuge stammen. Wie in der Abbildung ersichtlich, werden die Dipole so zusammengefaßt, daß eine skalare Addition der Einzelenergien der Dipole stattfindet, wenn die Erregerwelle kohärent ist.

Bei einer Antennenlänge L ist dann die Dipolzahl

$$p = L/\lambda$$

und somit die Empfängererregung für das Nutzziel $p U_a$, wo U_a die einzelne Dipol-erregung durch das Nutzziel bedeutet (Peilwinkel $\Theta = 0$).

Für eine inkohärente Störwelle wird jedoch die Summenerregung

$$\sum p U_{a_s} e^{j \alpha_k k}.$$

Nun ist die Anzahl der noch kohärenten Störerregungen der Antenne

$$q = p/k = p \lambda x V^{-1/3},$$

so daß die resultierende Störspannung in statistischer Mittelung beträgt:

$$\sqrt{p/q} U_{ds} = \frac{1}{\sqrt{k}} U_{ds} = \frac{V^{1/6}}{\sqrt{\lambda x}} U_{ds}.$$

Daher ist:

$$\frac{\text{Nutzspannung}}{\text{Störspannung}} = \frac{U_d}{U_{ds}} \sqrt{p} \cdot \sqrt{\lambda x} V^{-1/6}.$$

Man kann z. B. bei einer Antenne von $10 \times 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$ die Zahl p bei $\lambda = 50 \text{ cm}$ zu $p = 400$ machen und so Entstörungen bis zu Verhältnissen 1 : 20 bewerkstelligen.

(Eingegangen am 21. August 1948.)

Diodengleichrichtung bei Zentimeter-Wellen.

Doehler-Effekt.

Von K. H. Beck, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird eine theoretische Begründung des „Doehler“-Effektes gefunden, indem von den allgemeinen Gleichungen für eine ebene Elektronenströmung ausgegangen wird und diese auf das nichtlineare Verhalten einer Diodenstrecke angewendet werden. Dabei wird nicht nur die Elektronenlaufzeit, sondern auch der Einfluß der Raumladung erfaßt.

Summary. A theoretical explanation for the „Doehler“-effect is given by applying the general expressions for a plane stream of electrons to the non-linear behaviour of a diode. Apart from the time of propagation the influence of the space charge is seized.

Résumé. Une explication théorique de l'effet de Doehler a été obtenue en appliquant les expressions générales d'un courant électronique parmi des électrodes plan-parallèles à la conduite non-linéaire d'une diode. Outre la durée de transit des électrons, l'influence de la charge spatiale est prise en considération.

1. Einleitung.

Wenn die Zeit, welche die Elektronen zum Durchlaufen einer Diodenstrecke benötigen, im Verhältnis zu der Periodendauer der angelegten Wechselspannung vernachlässigbar klein ist, dann gilt nach Barkhausen¹ für den Kurzschlußrichtstrom der Ausdruck

$$\Delta J_k = T \cdot \frac{U^2}{4},$$

wobei mit T die „Krümmung“ der Kennlinie bezeichnet wird. Dabei ist noch Voraussetzung, daß die Amplitude U der Wechselspannung verhältnismäßig klein ist.

Hier liegt die sogenannte Krümmungsgleichrichtung vor, das heißt die Richtwirkung entsteht durch die Krümmung, also durch die Nichtlinearität der Röhrenkennlinie.

Bei einem parabelförmigen Verlauf dieser Kennlinie (z. B. wenn sie dem Raumladungsgesetz folgt) erreicht der Kurzschlußrichtstrom seinen größten Wert, wenn der Arbeitspunkt gegen den Scheitelpunkt vorrückt, weil dort eben die größte Krümmung T auftritt, wie Abb. 1 zeigt.

Nun haben O. Doehler und C. Hecker² experimentelle Untersuchungen über das Verhalten des Richteffektes im Gebiete hoher Frequenzen (13 bis 60 cm Wellen-

¹ H. Barkhausen: Elektronenröhren, Bd. III, 4. Aufl.

² O. Doehler und C. Hecker: Ein neuer Gleichrichtungsmechanismus bei cm-Wellen. Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht Nr. 1086; Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 54, 7 (1939).

länge) angestellt, aus denen hervorgeht, daß das Maximum des Richteffektes nicht mehr mit der Stelle der größten Krümmung der Kennlinie zusammenfällt, sondern sich in den flacheren Teil der Kennlinie verlagert (Abb. 2). Der Arbeitspunkt liegt jetzt also mehr in dem mittleren Teil der Kennlinie. Darüber hinaus nimmt bei weiterem Vorrücken des Arbeitspunktes der Richtstrom wieder ab, um schließlich sein Vorzeichen zu wechseln. Es liegt die Vermutung nahe, daß für dieses Verhalten offenbar der Einfluß der Elektronenlaufzeit in der Diodenstrecke maßgebend ist.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, eine theoretische Begründung des „Doehler“-Effektes zu geben, wobei das Problem allgemein behandelt wird. Ausgehend von dem Ergebnis einer Veröffentlichung von H. W. König über das Verhalten einer ebenen Elektronenströmung im elektrischen Längsfeld mit Berücksichtigung des Einflusses der Elektronenlaufzeit und der Raumladung, werden die dort angegebenen Ausdrücke auf das nichtlineare Verhalten der Elektronenströmung ange-

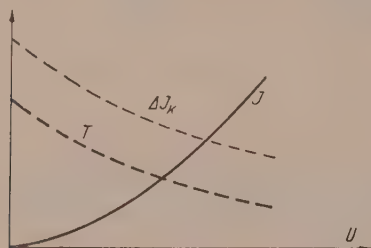


Abb. 1. Richteffect bei kleinen Frequenzen.

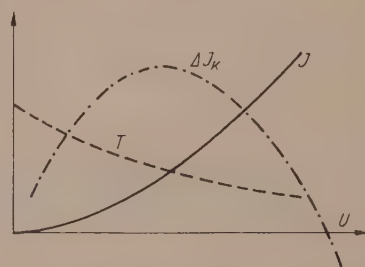


Abb. 2. Richteffect bei hohen Frequenzen, Doehler-Effekt.

wendet. Durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes der in Betracht kommenden Größen wird der hier interessierende Richteffect aus dem erhaltenen Ergebnis abgespalten, wobei wir uns nur auf den quadratischen Anteil des Richteffectes beschränken wollen. Bei kleinen Amplituden des gleichzurichtenden Wechselstromes deckt sich der gesamte Richteffect mit diesem quadratischen Anteil. In der Untersuchung wird von einer einheitlichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Elektronen ausgegangen, die in einem gewissen Grade die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen berücksichtigt. Es sei hier gleich im besonderen hervorgehoben, daß das wechselstrommäßige Verhalten der Kathode eine ausschlaggebende Rolle für das Zustandekommen des „Doehler“-Effektes spielt: Dieses wechselstrommäßige Verhalten der Kathode wird, wie H. W. König in seinem vor kurzem erschienenen Buch³ zeigt, durch das sogenannte Sättigungsmaß η charakterisiert, welches das Verhältnis des Verschiebungsstromes an der Kathode zu dem gesamten, über die Kathode geführten Wechselstrom angibt. Während dort nur die reelle Komponente desselben berücksichtigt wird, stellt es sich bei unseren Untersuchungen heraus, daß besonders der imaginäre Bestandteil für die Erklärung des „Doehler“-Effektes eine wichtige Bedeutung besitzt.

2. Grundgleichungen einer ebenen Elektronenströmung, Randbedingungen, Anwendung auf das nichtlineare Verhalten.

Aus der Arbeit von H. W. König⁴ entnehmen wir als Grundgleichungen einer ebenen Elektronenströmung die partiellen Differentialgleichungen:

³ H. W. König: Laufzeittheorie der Elektronenröhren, 1. und 2. Teil. Wien: Springer-Verlag. 1948.

⁴ H. W. König: Über das Verhalten von Elektronenströmen im elektrischen Längsfeld. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 62, H. 3 (1943).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon_0 v \frac{\partial E}{\partial x} &= J^*, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= K E, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

mit $K = \frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ spezifische Ladung des Elektrons; $\varepsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-14} \text{ F/cm}$ Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes und F Feldstärke, x Weg, t Zeit und v Geschwindigkeit.

Die Stromdichte J^* wird als gegeben betrachtet und ist von x wegen der Quellenfreiheit unabhängig.

Der betrachtete Raum sei von zwei ebenen Elektroden begrenzt, in dem von einer Seite Elektronen mit der Geschwindigkeit v_0 eintreten. Da über die Elektroden dem Elektronenstrom J_0 ein Wechselstrom $\mathfrak{J} \cdot \sin \omega t$ überlagert wird, gilt für J^* der Ansatz

$$J^* = J_0 + \mathfrak{J} \cdot \sin \omega t. \quad (2)$$

Unter Verwendung der auch in Anm. 4 eingeführten, dimensionslosen Feldgrößen und Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \omega t &= \varphi, & \frac{K}{v_0 \omega} E &= \frac{E}{E_0} = F, \\ \frac{\omega x}{v_0} &= z, & \frac{\mathfrak{J}}{J_0} &= p, \\ \frac{v}{v_0} &= u, & \frac{\varepsilon_0 v_0 \omega^2}{K J_0} &= q_0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

erhalten wir für das obige Gleichungssystem (1) nachfolgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + u q_0 \frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + p \cdot \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= F. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Lösung mit den zwei willkürlichen Funktionen G und H und dem Parameter ψ lautet:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= \psi - p \cdot \cos \varphi, \\ 2 q_0 u &= \psi^2 + G(\psi - \varphi) - 2 p \cdot \sin \varphi, \\ 6 q_0 z &= \psi^3 + H(\psi - \varphi) + 3 \varphi \cdot G(\psi - \varphi) + 6 p \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Gleichungen (5) stellen die Feldstärke F und die Geschwindigkeit u als Funktionen der Zeit φ und des Parameters ψ dar, der nach der Laufwinkelgleichung (6) mit dem Abstand z und der Zeit φ verknüpft ist.

Die beiden Funktionen G und H sind so zu bestimmen, daß die Randbedingungen an der Eintrittsstelle der Elektronen erfüllt werden.

An einer Unstetigkeitsstelle des Stromes (z. B. an einem Gitter) müssen Geschwindigkeit und Dichte der Ladungsträger einen stetigen Übergang aufweisen, das heißt es muß nach der ersten Gleichung von (4) sein:

$$q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - p \cdot \sin \varphi = 1 - u q_0 \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - u \frac{q}{q_0},$$

weil ja

$$u q_0 \frac{\partial F}{\partial z} = u \frac{q}{q_0} = \frac{J_v}{J_0} \quad (7)$$

den Konvektionsanteil und

$$q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{J_v}{J_0} \quad (8)$$

den Verschiebungsanteil des zugeführten Wechselstromes darstellen. Wegen der Stetigkeit der rechten Seite der obigen Gleichung muß nun der Ausdruck

$$q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - p \cdot \sin \varphi$$

ebenfalls stetig bleiben.

Damit ist auch die Stetigkeitsbedingung für den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} - p \cdot \sin \varphi, \quad (9)$$

der sich durch Differentiation der ersten Gleichung von (5) nach φ ergibt, nachgewiesen.

Soviel über die Ergebnisse der unter Anm. 4 zitierten Arbeit.

Für die Aufstellung der Randbedingungen gelten folgende Überlegungen: An der Eintrittsstelle der Elektronen, also an der Stelle $x = 0$ oder entsprechend (3): $z = 0$, ist die Elektronengeschwindigkeit $v = v_0$, weil wir, wie erwähnt, die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen mit berücksichtigen wollen. Damit wird wieder nach (3) $u = 1$. Als grundlegend für das Verhalten der Elektronenströmung ist nun der Einfluß der Feldstärke F an der Eintrittsstelle anzusehen. Befindet sich an dieser Stelle eine emittierende Elektronenquelle (Kathode), wie in dieser Untersuchung vorausgesetzt wird, dann ergibt sich im Raumladungsgebiet unter der bereits getroffenen Annahme einer von Null verschiedenen Austrittsgeschwindigkeit v_0 der Elektronen aus der Kathode eine bremsende Gleichfeldstärke, deren Größe von dem entnommenen Gleichstrom abhängig ist [Anm. 3, S. 213 (419)]⁵. Der gesamte über die Kathode geführte Strom (4)

$$1 + p \cdot \sin \varphi = q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + u q_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

spaltet sich in einen Verschiebungs- und einen Konvektionsteil, die sich mit Hilfe des Komponenten des Sättigungsmaßes darstellen lassen [Anm. 3, S. 236 (474a)]:

$$\begin{aligned} \frac{J_v}{J_0} &= q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} = (1 - \beta) p \cdot \sin \varphi - \gamma p \cdot \cos \varphi, \\ \frac{J_k}{J_0} &= u q_0 \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \beta p \cdot \sin \varphi + \gamma p \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Wechselfeldstärke an der Kathode bestimmt.

Wir führen weiterhin für die Komponenten $(1 - \beta)$ und μ die neuen Bezeichnungen η_1 und η_2 ein und haben dann η_1 als den Realteil und η_2 als den Imaginärteil des Sättigungsmaßes

$$\eta = \eta_1 - j \eta_2.$$

aufzufassen.

Aus der ersten Gleichung für die beiden Stromanteile

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_v}{J_0} &= q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \eta_1 p \cdot \sin \varphi - \eta_2 p \cdot \cos \varphi, \\ \frac{J_k}{J_0} &= u q_0 \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + (1 - \eta_1) p \cdot \sin \varphi + \eta_2 p \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

finden wir durch Integration:

$$F = - \eta_1 \frac{p}{q_0} \cdot \cos \varphi - \eta_2 \frac{p}{q_0} \cdot \sin \varphi + \frac{\alpha}{q_0}$$

mit der Integrationskonstante $\frac{\alpha}{q_0}$, die die Gleichfeldstärke an der Kathode darstellt.

⁵ Die Zitate aus dem erwähnten Buche von H. W. König erfolgen in Hinkunft mit Angabe der Seite und fallweise der Formelnummer.

Zusammenfassend haben wir dann die Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} z &= 0, \\ u &= 1, \\ F &= \frac{\alpha}{q_0} - \eta_1 \frac{p}{q_0} \cdot \cos \varphi - \eta_2 \frac{p}{q_0} \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für F aus (11) in (9) und Integration ergibt sich für den Parameter ψ :

$$\psi = (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi + \alpha, \quad (12)$$

wobei die Integrationskonstante α durch Vergleich mit der ersten Gleichung von (5) bestimmt wurde.

Um die Funktionen G und H zu bestimmen, gehen wir mit dem eben erhaltenen Ausdruck (12) unter Rücksicht auf die weiteren Randbedingungen (11) in die Grundgleichungen (5) und (6):

$$\begin{aligned} 2 q_0 \cdot 1 &= (1 - \eta_1)^2 p^2 \cdot \cos^2 \varphi + \eta_2^2 p^2 \cdot \sin^2 \varphi + \alpha^2 - 2 (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \\ &+ 2 (1 - \eta_1) \alpha p \cdot \cos \varphi - 2 \eta_2 \alpha p \cdot \sin \varphi + \\ &+ G \{ (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi + \alpha - \varphi \}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \eta_1)^3 p^3 \cdot \cos^3 \varphi - 3 (1 - \eta_1)^2 \eta_2 p^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + 3 (1 - \eta_1) \eta_2^2 p^3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi - \eta_2^3 p^3 \cdot \sin^3 \varphi + \\ &+ 3 (1 - \eta_1)^2 \alpha p^2 \cdot \cos^2 \varphi + 3 \eta_2^2 \alpha p^2 \cdot \sin^2 \varphi - \\ &- 6 (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 3 (1 - \eta_1) \alpha^2 p \cdot \cos \varphi - 3 \eta_2 \alpha^2 p \cdot \sin \varphi + \alpha^3 + \\ &+ H \{ (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi + \alpha - \varphi \} + \\ &+ 3 \varphi \cdot G \{ (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi + \alpha - \varphi \} + \\ &+ 6 p \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Für das Argument der Funktion G und H in (13) und (14) setzen wir ξ und fassen es als Funktion von φ und p auf:

$$(1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi + \alpha - \varphi = \xi. \quad (15)$$

Um auf das Argument $(\psi - \varphi)$ zu kommen, haben wir φ als Umkehrfunktion von ξ nach (15) zu bestimmen. Wir berechnen φ als Potenzreihe von p und brechen, wie bereits vereinbart, nach dem quadratischen Gliede ab:

$$\varphi = \varphi(\xi, p) = \varphi(\xi, 0) + \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial^2 \varphi(\xi, 0)}{\partial p^2} \cdot \frac{1}{2} p^2 + \dots \quad (16)$$

Die Stelle $p = 0$ entspricht dem Arbeitspunkt, um den die Schwankung durch die angelegte Wechselspannung stattfindet. Das erste Glied der Reihe errechnet sich nach (15):

$$\begin{aligned} p = 0 \dots \varphi_{p=0} &= \varphi(\xi, 0) = \varphi_0, \\ \xi &= \alpha - \varphi_0, \\ \varphi_0 &= \alpha - \xi. \end{aligned}$$

Die Differentialquotienten ergeben sich für $p = 0$ mit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{p=0}} &= (1 - \eta_1) \cdot \cos \varphi_0 - \eta_2 \cdot \sin \varphi_0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2_{p=0}} &= 2 \{ \eta_2^2 - (1 - \eta_1)^2 \} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + 2 (1 - \eta_1) \eta_2 \{ \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \}; \end{aligned}$$

damit erhalten wir die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0 + \\ &+ \{ \eta_2^2 - (1 - \eta_1)^2 \} p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \{ \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Zur Bestimmung der Funktionen $G(\xi)$ und $H(\xi)$ werden die Funktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ benötigt, die unter Rücksicht auf (17) mit Hilfe der Taylor-Reihe bestimmt werden zu:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \sin \varphi_0 + (1 - \eta_1) p \cdot \cos^2 \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \\ &+ \{\eta_2^2 - (1 - \eta_1)^2\} p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi_0 + (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \\ &\cdot \{\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0\} - \frac{1}{2} [(1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0]^2 \cdot \sin \varphi_0 + \dots, \\ \cos \varphi &= \cos \varphi_0 - (1 - \eta_1) p \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \eta_2 p \cdot \sin^2 \varphi_0 - \\ &- \{\eta_2^2 - (1 - \eta_1)^2\} p^2 \cdot \sin^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \{\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0\} - \\ &- \frac{1}{2} [(1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0]^2 \cdot \cos \varphi_0 + \dots\end{aligned}$$

Aus (13) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}G(\xi) &= 2q_0 - \alpha^2 - 2(1 - \eta_1) \alpha p \cdot \cos \varphi_0 + 2(1 - \eta_1)^2 \alpha p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \\ &+ (1 - \eta_1^2) p^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 + 2p \cdot \sin \varphi_0 - 2(1 - \eta_1) \eta_2 \alpha p^2 \cdot \{\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0\} - \\ &- \eta_2^2 p^2 \cdot \sin^2 \varphi_0 - 2\eta_1 \eta_2 p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2\eta_2^2 \alpha p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \\ &+ 2\eta_2 \alpha p \cdot \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (18)$$

Die Funktion $H(\xi)$ ergibt sich aus (14) mit:

$$\begin{aligned}H(\xi) &= -\alpha^3 - 3(1 - \eta_1) \alpha^2 p \cdot \{\cos \varphi_0 - (1 - \eta_1) p \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \eta_2 p \cdot \sin^2 \varphi_0\} - \\ &- 3(1 - \eta_1)^2 \alpha p^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 - 6p \cdot \{\cos \varphi_0 - (1 - \eta_1) p \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \\ &+ \eta_2 p \cdot \sin^2 \varphi_0\} + 6(1 - \eta_1) \eta_2 \alpha p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - 3\eta_2^2 \alpha p^2 \cdot \sin^2 \varphi_0 + \\ &+ 3\eta_2 \alpha^2 p \cdot \{\sin \varphi_0 + (1 - \eta_1) p \cdot \cos^2 \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0\} - \\ &- 3[\varphi_0 + (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi_0 - \eta_2 p \cdot \sin \varphi_0 + \{\eta_2^2 - (1 - \eta_1)^2\} p^2 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \\ &+ (1 - \eta_1) \eta_2 p^2 \cdot \{\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0\}] \cdot G(\xi).\end{aligned}\quad (19)$$

In diesen Funktionalgleichungen wählen wir für die Variable ξ den Wert $(\psi - \varphi)$, daher wird für

$$\varphi_0 = \alpha - \xi = \alpha - \psi + \varphi. \quad (20)$$

Zur Vereinfachung setzen wir

$$\psi - \alpha = W \quad (21)$$

und somit nach (20)

$$\varphi_0 = \varphi - W. \quad (22)$$

Mit den aus den Randwertbedingungen bestimmten Funktionen G und H können wir nun die Grundgleichungen (5) und (6) anschreiben. Den Parameter ψ ersetzen wir nach (21) durch $W + \alpha$. Somit wird:

$$q_0 F = W + \alpha - p \cdot \cos \varphi \quad (23)$$

$$\begin{aligned}2q_0 u &= W^2 + 2\alpha W + 2q_0 - 2p \cdot \{\sin(W - \varphi) + \sin \varphi\} - 2p \{(1 - \eta_1) \alpha \cdot \cos(W - \varphi)\} - \\ &- p^2 \cdot \{2(1 - \eta_1)^2 \alpha \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) - (1 - \eta_1^2) \cdot \cos^2(W - \varphi)\} - \\ &- 2p \cdot \{\eta_2 \alpha \cdot \sin(W - \varphi)\} + \\ &+ p^2 \cdot \{2(1 - \eta_1) \eta_2 \alpha [\cos^2(W - \varphi) - \sin^2(W - \varphi)] + 2\eta_2 (\eta_1 + \alpha \eta_2) \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \\ &\cdot \cos(W - \varphi) - \eta_2^2 \cdot \sin^2(W - \varphi)\}\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}
6 q_0 z = & W^3 + 3 W^2 \alpha + 6 q_0 W - 6 p \cdot \{W \cdot \sin(W - \varphi) + \cos(W - \varphi) - \cos \varphi\} - \\
& - 6 p \cdot \{(1 - \eta_1)(q_0 + \alpha W) \cdot \cos(W - \varphi)\} + 3 p^2 \cdot \{(1 - \eta_1)^2 \alpha \cdot \cos^2(W - \varphi) - \\
& - 2(q_0 + \alpha W)(1 - \eta_1)^2 \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + (1 - \eta_1^2) W \cdot \cos^2(W - \varphi)\} - \\
& - 6 p \cdot \{(q_0 + \alpha W) \eta_2 \cdot \sin(W - \varphi)\} + \\
& + 3 p^2 \cdot \{(\alpha - W) \eta_2^2 \cdot \sin^2(W - \varphi) - 2(q_0 + \alpha W)(1 - \eta_1) \eta_2 [\sin^2(W - \varphi) - \\
& - \cos^2(W - \varphi)] + 2(q_0 + \alpha W) \eta_2^2 \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + 2 \eta_1 \eta_2 W \cdot \\
& \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + 2(1 - \eta_1) \eta_2 \alpha \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi)\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Diese Grundgleichungen beschreiben das Verhalten der Elektronenströmung, wenn dem Elektronenstrom J_0 ein Wechselstrom $\mathfrak{J} \cdot \sin \omega t$ in der Diodenstrecke überlagert wird. Das nichtlineare Verhalten ist durch die quadratischen Glieder in p ausgedrückt.

In (25) führen wir zur Vereinfachung folgende Funktionalgleichungen ein, wobei die „Feldfunktion“ [Anm. 3, S. 19 (62)]

$$f(W, \varphi) = W \cdot \sin(W - \varphi) + \cos(W - \varphi) - \cos \varphi \quad (26)$$

benützt wird:

$$A(W, \varphi) = f(W, \varphi) + (1 - \eta_1)(q_0 + \alpha W) \cdot \cos(W - \varphi), \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
B(W, \varphi) = & (1 - \eta_1)^2 \alpha \cdot \cos^2(W - \varphi) - 2(q_0 + \alpha W)(1 - \eta_1)^2 \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + \\
& + (1 - \eta_1^2) W \cdot \cos^2(W - \varphi), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$C(W, \varphi) = (q_0 + \alpha W) \eta_2 \cdot \sin(W - \varphi), \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
D(W, \varphi) = & (\alpha - W) \eta_2^2 \cdot \sin^2(W - \varphi) - 2(q_0 + \alpha W)(1 - \eta_1) \eta_2 [\sin^2(W - \varphi) - \\
& - \cos^2(W - \varphi)] + 2(q_0 + \alpha W) \eta_2^2 \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + \\
& + 2 \eta_1 \eta_2 W \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \cos(W - \varphi) + 2(1 - \eta_1) \eta_2 \alpha \cdot \sin(W - \varphi) \cdot \\
& \cdot \cos(W - \varphi). \quad (30)
\end{aligned}$$

Gleichung (25) nimmt dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
6 q_0 z = & W^3 + 3 W^2 \alpha + 6 W q_0 - 6 p \cdot \{A(W, \varphi) + C(W, \varphi)\} + 3 p^2 \cdot \{B(W, \varphi) + \\
& + D(W, \varphi)\}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Nach [Anm. 4] ist $\psi - \psi_0$ die „Zeit“, die ein bestimmtes Elektron braucht, um die „Strecke“ $z - z_0$ zu durchlaufen. Allgemein ist

$$\psi - \psi_0 = \varphi - \varphi_0 = w$$

der Laufwinkel. In (31) haben wir eine Beziehung zwischen dem Laufwinkel $\psi - \psi_0$, dem virtuellen Laufwinkel $z - z_0$ und dem Phasenwinkel $\varphi - \varphi_0$. Es interessiert die Laufzeit, die ein Elektron braucht, um von der Eintrittsstelle (Kathode) zu einem Punkte x zu gelangen. Wir setzen also:

$$\begin{aligned}
x_0 = 0 \dots z_0 = 0, \\
\psi_0 = \alpha + (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi - \eta_2 p \cdot \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Somit ist der Laufwinkel

$$\begin{aligned}
w = \psi - \psi_0 = \psi - \alpha - (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi + \eta_2 p \cdot \sin \varphi = \\
= W - (1 - \eta_1) p \cdot \cos \varphi + \eta_2 p \cdot \sin \varphi, \quad (32)
\end{aligned}$$

den ein Elektron benötigt, um von der Stelle $z_0 = 0$ zu der Stelle z zu kommen.

3. Auflösung der Laufwinkelgleichung.

Zur Umkehrung der Gl. (31) fassen wir W als Funktion von z und p auf und setzen eine Reihenentwicklung an der Stelle $p = 0$ bei konstant gehaltenem z an, die wir nach dem quadratischen Gliede abbrechen:

$$W = W(z, p) = W(z, 0) + \frac{\partial W(z, 0)}{\partial p} \cdot p + \frac{\partial^2 W(z, 0)}{\partial p^2} \cdot \frac{1}{2} p^2 + \dots$$

Für das erste Glied schreiben wir nach (32):

$$W_{p=0} = W(z, 0) = w_1,$$

wobei der Index „1“ den stationären Zustand $p = 0$ ausdrückt. Die Berechnung der Differentialausdrücke ergibt durch Differentiation von (31) für

$$\frac{\partial W}{\partial p_{p=0}} = \frac{A(w_1) + C(w_1)}{\frac{1}{2}(w_1^2 + 2\alpha w_1 + 2q_0)}$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial p_{p=0}} = \frac{A(w_1) + C(w_1)}{q_0 u_1},$$

wenn aus der Grundgleichung (24) für das Gleichstromverhalten $p = 0$ eingesetzt wird [Anm. 3, S. 8 (20)]:

$$2q_0 u_1 = w_1^2 + 2\alpha w_1 + 2q_0.$$

Weiters wird durch zweimalige Differentiation von (31):

$$\begin{aligned} q_0 u_1 \frac{\partial^2 W}{\partial p^2_{p=0}} &= 2 \cdot \left\{ \frac{\partial A(w_1)}{\partial w_1} + \frac{\partial C(w_1)}{\partial w_1} \right\} \cdot \frac{A(w_1) + C(w_1)}{q_0 u_1} - \\ &- \frac{w_1 + \alpha}{q_0^2 u_1^2} \cdot \{A(w_1) + C(w_1)\}^2 - \{B(w_1) + D(w_1)\}. \end{aligned}$$

Aus (23) für $p = 0$ erhalten wir [Anm. 3, S. 8 (20)]:

$$q_0 F_1 = w_1 + \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial w_1} (2q_0 u_1);$$

damit und unter Rücksicht, daß

$$2 \frac{\partial}{\partial w_1} \{A(w_1) + C(w_1)\} \cdot \frac{A(w_1) + C(w_1)}{q_0 u_1} = \frac{1}{q_0 u_1} \cdot \frac{\partial}{\partial w_1} \{A(w_1) + C(w_1)\}^2$$

ist, können wir schreiben:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p^2_{p=0}} = \frac{1}{q_0 u_1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ \frac{[A(w_1) + C(w_1)]^2}{q_0 u_1} \right\} - \{B(w_1) + D(w_1)\} \right].$$

Somit lautet der Reihenansatz:

$$\begin{aligned} W &= w_1 + \frac{A(w_1) + C(w_1)}{q_0 u_1} \cdot p + \frac{1}{2 q_0 u_1} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ \frac{[A(w_1) + C(w_1)]^2}{q_0 u_1} \right\} - \{B(w_1) + D(w_1)\} \right] \cdot p^2. \end{aligned} \quad (33)$$

4. Integral der Feldstärke, Richteffekt.

Für die zwischen den Elektroden der Diodenstrecke herrschende Spannung schreiben wir [Anm. 3, S. 4 (7)]:

$$U_1 = \int_0^{x_1} E dx = \frac{v_0^2}{2K} \cdot 2 \int_0^{z_1} F dz_1$$

oder

$$\frac{U_1}{U_0} = 2 \int_0^{z_1} F dz_1. \quad (34)$$

$v_0^2/2 K$ ist gleich dem Spannungsäquivalent U_0 der mit der Geschwindigkeit v_0 aus der Kathode austretenden Elektronen.

Wir verwenden zur Berechnung von U_1 die erste Grundgleichung (23), in die wir den Ausdruck für W nach (33) einführen. Da wir als Ziel unserer Betrachtung den Richteffect im Auge haben, bilden wir gleich den zeitlichen Mittelwert der in Betracht kommenden Größen, der durch einen Querstrich gekennzeichnet wird. Wir haben dann:

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = 2 \int_0^{z_1} \bar{F} dz_1 \quad (35)$$

und

$$q_0 \bar{F} = \bar{W} + \alpha - p \cdot \overline{\cos \varphi} = q_0 F_1 + \frac{p^2}{2 q_0 u_1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ \frac{[\bar{A} + \bar{C}]^2}{q_0 u_1} \right\} - \{\bar{B} + \bar{D}\} \right]$$

und weiter

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = 2 \int_0^{z_1} F_1 dz_1 + \frac{p^2}{q_0^2} \int_0^{z_1} \left[\frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ \frac{[\bar{A} + \bar{C}]^2}{q_0 u_1} \right\} - \{\bar{B} + \bar{D}\} \right] \frac{dz_1}{u_1}. \quad (36)$$

Zur Auswertung des ersten Integralausdruckes müssen wir eine Variablentransformation von z_1 auf u_1 vornehmen. Wir benützen die Grundgleichungen für den Gleichstromfall ($p = 0$) [Anm. 3, S. 8 (20), (21)], die wir nun anschreiben:

$$q_0 F_1 = w_1 + \alpha \quad (37)$$

$$2 q_0 u_1 = w_1^2 + 2 \alpha w_1 + 2 q_0 \quad (38)$$

$$6 q_0 z_1 = w_1^3 + 3 \alpha w_1^2 + 6 q_0 w_1. \quad (39)$$

Durch Differentiation von (39) und mit Rücksicht auf (38) erhalten wir [Anm. 3, S. 36 (98)]:

$$dz_1 = u_1 dw_1. \quad (40)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus (38) und (37) [Anm. 3, S. 36 (99)]:

$$du_1 = F_1 dw_1. \quad (41)$$

Somit können wir schreiben:

$$2 \int_0^{z_1} F_1 dz_1 = 2 \int_0^{u_1} u_1 du_1 = u_1^2 - 1.$$

In dem zweiten Integral verwenden wir mit (40) die Variable w_1 und haben also für den Mittelwert der Spannung (36):

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = u_1^2 - 1 + \frac{p^2}{q_0^2} \left[\frac{[\bar{A} + \bar{C}]^2}{q_0 u_1} \right]_0^{w_1} - \int_0^{w_1} \{\bar{B} + \bar{D}\} dw_1. \quad (42)$$

Nun erfolgt die Bestimmung des zeitlichen Mittelwertes der Ausdrücke $[\bar{A} + \bar{C}]^2$ und $\bar{B} + \bar{D}$. Es wird:

$$\begin{aligned} \bar{A}^2(w_1) &= f^2(w_1) + 2 \cdot f(w_1) \cdot (1 - \eta_1) (q_0 + \alpha w_1) \cdot \cos(w_1 - \varphi) + \\ &+ (1 - \eta_1)^2 (q_0 + \alpha w_1)^2 \cdot \cos^2(w_1 - \varphi). \end{aligned}$$

Nach [Anm. 3, S. 21 (69)] setzen wir:

$$f(w_1) = f_0 \cdot \cos \varphi + f_{\pi/2} \cdot \sin \varphi$$

mit [Anm. 3, S. 30 (92)]

$$f_0 = w_1 \cdot \sin w_1 + \cos w_1 - 1,$$

$$f_{\pi/2} = -w_1 \cdot \cos w_1 + \sin w_1.$$

Daher ergibt sich:

$$\bar{f}^2(w_1) = \frac{1}{2} \{f_0^2 + f_{\pi/2}^2\} = \frac{1}{2} \{w_1^2 + 2 - 2w_1 \cdot \sin w_1 - 2 \cdot \cos w_1\}$$

und

$$\overline{f(w_1) \cdot \cos(w_1 - \varphi)} = \frac{1}{2} \{f_0 \cdot \cos w_1 + f_{\pi/2} \cdot \sin w_1\} = \frac{1}{2} \{1 - \cos w_1\}.$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{A}^2(w_1) &= \frac{1}{2} \cdot \{w_1^2 + 2 - 2w_1 \cdot \sin w_1 - 2 \cos w_1\} + (1 - \eta_1) (q_0 + \alpha w_1) \{1 - \cos w_1\} + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \eta_1)^2 (q_0 + \alpha w_1)^2. \end{aligned}$$

Weiters:

$$\begin{aligned} 2 \overline{A(w_1) \cdot C(w_1)} &= 2 \overline{f(w_1) \cdot \eta_2 (q_0 + \alpha w_1) \cdot \sin(w_1 - \varphi)} + \\ &+ 2 (1 - \eta_1) \overline{(q_0 + \alpha w_1) \cdot \cos(w_1 - \varphi) \cdot \eta_2 (q_0 + \alpha w_1) \cdot \sin(w_1 - \varphi)}; \end{aligned}$$

mit

$$\overline{f(w_1) \cdot \sin(w_1 - \varphi)} = \frac{1}{2} \cdot \{f_0 \cdot \sin w_1 - f_{\pi/2} \cdot \cos w_1\} = \frac{1}{2} \{w_1 - \sin w_1\}$$

haben wir

$$2 \overline{A(w_1) \cdot C(w_1)} = \eta_2 (q_0 + \alpha w_1) \cdot \{w_1 - \sin w_1\}$$

und endlich

$$\bar{C}^2(w_1) = \eta_2^2 (q_0 + \alpha w_1)^2 \cdot \overline{\sin^2(w_1 - \varphi)} = \frac{1}{2} \eta_2^2 (q_0 + \alpha w_1)^2.$$

Die Funktionen $\bar{B}$ und $\bar{D}$ ergeben sich mit:

$$\begin{aligned} \bar{B}(w_1) &= (1 - \eta_1^2)^2 \alpha \cdot \overline{\cos^2(w_1 - \varphi)} - 2 (1 - \eta_1)^2 \overline{(q_0 + \alpha w_1) \cdot \sin(w_1 - \varphi) \cdot \cos(w_1 - \varphi)} + \\ &+ (1 - \eta_1^2) \overline{w_1 \cdot \cos^2(w_1 - \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2)^2 \alpha + \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) w_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{D}(w_1) &= \eta_2^2 \overline{(\alpha - w_1) \cdot \sin^2(w_1 - \varphi)} - 2 (1 - \eta_1) \eta_2 \overline{(q_0 + \alpha w_1) \{\sin^2(w_1 - \varphi) - \\ &- \cos^2(w_1 - \varphi)\}} + 2 \eta_2^2 \overline{(q_0 + \alpha w_1) \cdot \sin(w_1 - \varphi) \cdot \cos(w_1 - \varphi)} + \\ &+ 2 \eta_1 \eta_2 \overline{w_1 \cdot \sin(w_1 - \varphi) \cdot \cos(w_1 - \varphi)} + 2 (1 - \eta_1) \eta_2 \alpha \cdot \overline{\sin(w_1 - \varphi) \cdot \\ &\cdot \cos(w_1 - \varphi)} = \frac{1}{2} \eta_2^2 (\alpha - w_1). \end{aligned}$$

Wir setzen diese erhaltenen Ausdrücke in (42) ein und mit Rücksicht darauf, daß bei $w_1 = 0$, $u_1 = 1$ wird, bekommen wir:

$$\begin{aligned} \left[\frac{A(w_1) + C(w_1)}{q_0 u_1} \right]^2 \Big|_0^{w_1} &= \frac{1}{q_0 u_1} \cdot \left[\frac{1}{2} (w_1^2 + 2 - 2w_1 \cdot \sin w_1 - 2 \cdot \cos w_1) + \right. \\ &+ (1 - \eta_1) (q_0 + \alpha w_1) (1 - \cos w_1) + \frac{1}{2} (1 - \eta_1)^2 (q_0 + \alpha w_1)^2 + \\ &+ \eta_2 (q_0 + \alpha w_1) (w_1 - \sin w_1) + \frac{1}{2} \eta_2^2 (q_0 + \alpha w_1)^2 \Big] - \\ &- \frac{1}{q_0} \cdot \left[\frac{1}{2} (1 - \eta_1)^2 q_0^2 + \frac{1}{2} \eta_2^2 q_0^2 \right] \\ \int_0^{w_1} \bar{B}(w_1) dw_1 &= \frac{1}{2} (1 - \eta_1)^2 \alpha w_1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) \cdot \frac{w_1^2}{2} \\ \int_0^{w_1} \bar{D}(w_1) dw_1 &= \frac{1}{2} \eta_2^2 \alpha w_1 - \frac{1}{2} \eta_2^2 \cdot \frac{w_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Eine entsprechende Umformung des Integrals des Mittelwertes der Feldstärke (42), wobei nach (38)

$$2 q_0 u_1 = w_1^2 + 2 \alpha_1 w_1 + 2 q_0$$

eingeführt wird, liefert nun die Hauptgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{U}_1}{U_0} &= u_1^2 - 1 + 2 \frac{p^2}{q_0^2} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1 - w_1 \cdot \sin w_1 - \cos w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 + (1 - \eta_1) (q_0 + \alpha w_1) \left(1 - \cos w_1 - \frac{1}{2} w_1^2 \right)}{w_1^2 + 2 \alpha w_1 + 2 q_0} + \right. \\ &\left. + \frac{-\frac{1}{8} (1 - \eta_1^2) w_1^4 + \eta_2 (q_0 + \alpha w_1) (w_1 - \sin w_1) + \frac{1}{8} \eta_2^2 w_1^4}{w_1^2 + 2 \alpha w_1 + 2 q_0} \right] \\ &= u_1^2 - 1 + 2 \frac{p^2}{q_0^2} \cdot Q \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

für unser gestelltes Problem.

Den geklammerten Term in obiger Formel bezeichnen wir mit Q ; diese Funktion bietet die Lösung für alle interessierenden Fragen und enthält den Laufzeiteinfluß. Die Hauptgleichung (43) gilt für den Leerlauf, also für einen unendlich großen Außenwiderstand ($R_a = \infty$), da in den bisherigen Entwicklungen der Gleichstrom konstant gehalten würde ($q_0 = \text{const.}$).

Der zeitliche Mittelwert der Spannung $\bar{U}_1$ enthält die an die beiden Elektroden gelegte Gleichspannung U_1 zur Einstellung des Arbeitspunktes und die Leerlaufrichtspannung ΔU_l . Wir bestimmen aus (43) die Spannung $\bar{U}_1$, indem wir beachten, daß gilt:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2K}, \quad (44)$$

$$\text{und erhalten: } U_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2K} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{v_0^2}{2K} \left\{ \frac{v_0^2}{v_1^2} - 1 \right\} + U_0 \cdot 2 \frac{p^2}{q_0^2} \cdot Q = \\ &= \frac{v_1^2 - v_0^2}{2K} + U_0 \cdot 2 \frac{p^2}{q_0^2} Q = U_1 + U_0 \cdot 2 \frac{p^2}{q_0^2} Q. \end{aligned}$$

Nehmen wir K als positive GröÙe an [Anm. 3, S. 3], dann sind die Spannungen U_0 und U_1 auch positiv und es ergibt sich die Leerlaufrichtspannung mit

$$\Delta U_l = \bar{U}_1 - U_1 = U_0 \cdot 2 \frac{p^2}{q_0^2} Q, \quad (46)$$

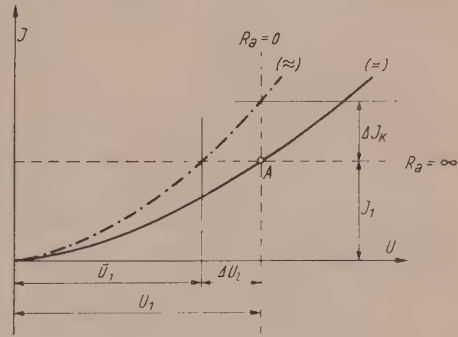


Abb. 3. Leerlaufrichtspannung ΔU_l und Kurzschlußrichtstrom ΔJ_k .

wobei die Funktion Q als negativ vorausgesetzt wird, wie dies für kleine Laufwinkel w_1 zutrifft (wird in einer späteren Arbeit gezeigt). In Abb. 3 sind diese Verhältnisse an Hand der Kennlinien dargestellt.

Führen wir in (46) die Ausdrücke für U_0 , p und q_0 ein, so bekommen wir:

$$\Delta U_l = 4 \frac{K}{\varepsilon_0^2 \omega^4} Q \cdot \frac{\mathfrak{Z}^2}{4}. \quad (47)$$

Diese Darstellung der Leerlaufrichtspannung bezieht sich auf das Quadrat des Wechselstromes $\mathfrak{Z}$. Die Rechnung hat uns zwanglos dazu geführt. Es ist jedoch gebräuchlich, sich auf das Quadrat der Wechselspannung U zu beziehen. Um diese Darstellungsart zu erhalten, muß der Widerstand der Elektronenstrecke für die Grundwelle eingeführt werden, der sich bei Berücksichtigung der Laufzeit aus kompli-

zierten Ausdrücken zusammensetzt. Damit werden auch die Ausdrücke für den Richteffekt unübersichtlicher.

Da sich die Untersuchungen Doehlers auf die erwähnte zweite Darstellungsart mit $\mathfrak{U}$ beziehen, werden wir diese in unseren Betrachtungen ebenfalls verwenden.

Zu diesem Zweck müssen wir in Formel (47) $\mathfrak{Z}^2$ durch

$$\mathfrak{U}^2/|\mathfrak{r}_1|^2 \quad (48)$$

ersetzen, wobei $\mathfrak{r}_1$ der Widerstand der Elektronenstrecke ist.

Für diesen Widerstand finden wir nach H. W. König [Anm. 3, S. 246 (485)] den Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{r}_1}{A} = \{A_0 + \beta [\alpha f_{\pi/2} - q_0 g_{\pi/2}]\} + j \{A_{\pi/2} + \beta [\alpha f_0 - q_0 g_0] - q_0 z_1\},$$

der nur die reelle Komponente des Sättigungsmaßes enthält.

In dieser Formel bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{K J_0}{\varepsilon_0^2 \omega^4}, \\ A_0 &= 2(1 - \cos w_1) - w_1 \cdot \sin w_1, \\ A_{\pi/2} &= 2 \sin w_1 - w_1(1 + \cos w_1) \\ f_0 &= w_1 \cdot \sin w_1 + \cos w_1 - 1, \\ f_{\pi/2} &= -w_1 \cdot \cos w_1 + \sin w_1, \\ g_0 &= -\sin w_1, \\ g_{\pi/2} &= \cos w_1 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Durch Ersatz von β durch $(1 - \eta)$ und mit Rücksicht, daß

$$\eta = \eta_1 - j \eta_2$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{r}_1}{A} &= \{A_0 + (1 - \eta_1) [\alpha f_{\pi/2} - q_0 g_{\pi/2}] - \eta_2 [\alpha f_0 - q_0 g_0]\} + \\ &+ j \{A_{\pi/2} + (1 - \eta_1) [\alpha f_0 - q_0 g_0] + \eta_2 [\alpha f_{\pi/2} - q_0 g_{\pi/2}] - q_0 z_1\} \end{aligned} \quad (50)$$

als gesuchten Widerstand der Diodenstrecke, der auch den imaginären Anteil des Sättigungsmaßes enthält.

Diesen Ausdruck formen wir entsprechend um. Mit (39) wird:

$$A = \frac{K J_0}{\varepsilon_0^2 \omega^4} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 \omega} \cdot \frac{1}{q_0 z_1} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 \omega} \cdot \frac{6}{6 q_0 w_1 + 3 \alpha w_1^2 + w_1^3}.$$

Im Raumladungsgebiet läßt sich die Feldgröße α nach einer von H. W. König gefundenen Beziehung [Anm. 3, S. 225 (457)] darstellen als

$$\alpha = -h \frac{w_0^2}{w_1}, \quad (51)$$

worin für

$$2 q_0 = w_0^2 \quad (52)$$

gesetzt ist und h die Kathodengüte bedeutet. Die Beziehung (51) bringt die Abhängigkeit der bremsenden Gleichfeldstärke an der Kathode von der Güte h derselben und von dem über die Kathode fließenden Gleichstrom zum Ausdruck. Für eine ideale Kathode gilt $h = 1$.

Aus (38) stellen wir im Verein mit (51) eine Beziehung zwischen w_0 und w_1 her:

$$w_0^2 = \frac{w_1^2}{w_1 - 1 + 2h}. \quad (53)$$

Daher können wir also schreiben:

$$A = \frac{K J_0}{\varepsilon_0^2 \omega^4} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 \omega} \cdot \frac{6}{w_1^3} \cdot \frac{u_1 - 1 + 2h}{u_1 + 2 - h}. \quad (54)$$

Für $q_0 z_1$ finden wir mit (39):

$$q_0 z_1 = \frac{1}{6} (6 q_0 w_1 + 3 \alpha w_1^2 + w_1^3) = \frac{w_1^3}{6} \cdot \frac{u_1 + 2 - h}{u_1 - 1 + 2h}. \quad (55)$$

Die Ausdrücke hinter $(1 - \eta_1)$ und η_2 werden entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha f_{\pi/2} - q_0 g_{\pi/2}] &= \frac{w_1^2}{u_1 - 1 + 2h} \left(h \frac{f_{\pi/2}}{w_1} + \frac{1}{2} g_{\pi/2} \right), \\ [\alpha f_0 - q_0 g_0] &= \frac{w_1^2}{u_1 - 1 + 2h} \left(h \frac{f_0}{w_1} + \frac{1}{2} g_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Somit erhalten wir mit diesen Umformungen:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{x_1}{\varepsilon_0 \omega} \cdot \frac{6}{w_1^3} \cdot \frac{u_1 - 1 + 2h}{u_1 + 2 - h} \times \\ &\times \left\{ \left[\Delta_0 - \frac{w_1^2}{u_1 - 1 + 2h} \left[(1 - \eta_1) \left(h \frac{f_{\pi/2}}{w_1} + \frac{1}{2} g_{\pi/2} \right) - \eta_2 \left(h \frac{f_0}{w_1} + \frac{1}{2} g_0 \right) \right] \right] + \right. \\ &+ j \left[\Delta_{\pi/2} - \frac{w_1^2}{u_1 - 1 + 2h} \left[(1 - \eta_1) \left(h \frac{f_0}{w_1} + \frac{1}{2} g_0 \right) + \eta_2 \left(h \frac{f_{\pi/2}}{w_1} + \frac{1}{2} g_{\pi/2} \right) \right] - \right. \\ &\left. \left. - \frac{w_1^3}{6} \cdot \frac{u_1 + 2 - h}{u_1 - 1 + 2h} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Wir sehen, wie durch diese Darstellungsart des Richteffektes eine weitere Abhängigkeit von dem Laufwinkel durch die Einführung des Widerstandes eintritt.

Aus dem Integral der Feldstärke haben wir im vorstehenden Rechnungsgang die Leerlaufrichtspannung ΔU_i erhalten. Im folgenden soll nun ein Ausdruck für den Kurzschlußrichtstrom ΔJ_k gefunden werden. Wenn die Gleichspannung U_1 um die Richtspannung ΔU_i erhöht wird, tritt eine Änderung des Stromes J_1 ein, die dem Kurzschlußrichtstrom ΔJ_k entspricht, wenn der Außenwiderstand $R_a = 0$ ist. Der Zusammenhang zwischen angelegter Gleichspannung U_1 und dem Gleich-Elektronenstrom J_1 geht aus dem von H. W. König angegebenen, korrigierten Raumladungsgesetz [Anm. 3, S. 225 (460)]

$$J_0 = J_1 = \frac{4 \varepsilon_0 \sqrt{2K}}{9 x_1^2} \cdot \{ \sqrt{U_1 + U_0} + (2h - 1) \sqrt{U_0} \} \cdot \{ \sqrt{U_1 + U_0} + (2 - h) \sqrt{U_0} \}^2 \quad (58)$$

hervor, das die Elektronenaustrittsgeschwindigkeit $v_0(U_0)$ aus der Kathode und die Kathodengüte h berücksichtigt. Für U_0 ist der doppelte Wert der mittleren Voltgeschwindigkeit der Maxwell-Verteilung zu setzen [Anm. 3, S. 221 (445)]:

$$U_0 = 2 \frac{k \cdot T_k}{e}.$$

Zur Berechnung des Kurzschlußrichtstromes haben wir also zu der gegebenen Funktion

$$y = f_0(x) + f_2(x) \cdot \frac{p^2}{2}$$

die Umkehrfunktion x in der Darstellung

$$x = g_0(y) + g_2(y) \cdot \frac{p^2}{2}$$

zu suchen, wenn die Entwicklung bis einschließlich des quadratischen Gliedes in p getrieben wird. Nun ist hierbei

$$g_2(y) = - \frac{f_2(x)}{f_0'(x)}.$$

und $g_0(y)$ die Umkehrung von $f_0(x)$. Für den Zuwachs von x gilt dann:

$$\Delta x = x - g_0(y) = g_2(y) \cdot \frac{p^2}{2} = -\frac{f_2(x)}{f_0'(x)} \cdot \frac{p^2}{2}. \quad (59)$$

In unserem Falle ist: $x = J_0$ und $y = \bar{U}_1$; weiterhin nach (46) und (47):

$$f_2(x) \cdot \frac{p^2}{2} = 4 \frac{K}{\varepsilon_0^2 \omega^4} Q \cdot \frac{J_0^2}{2} \cdot \frac{p^2}{2}.$$

Die Funktion $f_0(x) = f_0(J_0)$ ist die Umkehrung von (58):

$$J_{0p=0} = g_0(\bar{U}_1) = g_0(U_1).$$

Mit (59) ergibt sich dann für den Kurzschlußrichtstrom:

$$\begin{aligned} \Delta J_k &= J_0 - J_{0p=0} = J_0 - g_0(U_1) = \\ &= -\frac{f_2(J_0)}{f_0'(J_0)} \cdot \frac{p^2}{2} = -f_2(J_0) \cdot g_0'(U_1) \cdot \frac{p^2}{2}, \end{aligned} \quad (60)$$

da ja gilt:

$$f_0' = \frac{1}{g_0'}.$$

Aus (58) erhalten wir durch Differentiation:

$$g_0' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_0}{x_1^2} \sqrt{2K} \cdot \frac{\sqrt{U_1 + U_0 + (2-h)\sqrt{U_0}}}{\sqrt{U_1 + U_0}} \{ \sqrt{U_1 + U_0} + h\sqrt{U_0} \}$$

und weiterhin

$$\Delta J_k = -8 \frac{K}{\varepsilon_0 x_1 \omega^3} \cdot \frac{v_0}{3 x_1 \omega} \cdot \{u_1 + 2 - h\} \cdot \left\{1 + \frac{h}{u_1}\right\} Q \cdot \frac{\mathfrak{S}^2}{4},$$

wenn wir Rücksicht auf (44) und (45) nehmen.

Aus den Gl. (38) und (39) läßt sich mit (51) und (52) die Beziehung

$$w_1 = \frac{3 z_1}{u_1 + 2 - h} \quad (61)$$

ableiten, die wir in obige Formel einführen. Es ergibt sich dann für den Kurzschlußstrom der Ausdruck

$$\Delta J_k = -8 \frac{K}{\varepsilon_0 x_1 \omega^3} \cdot \left\{1 + \frac{h}{u_1}\right\} \cdot \frac{Q}{w_1} \cdot \frac{\mathfrak{S}^2}{4}, \quad (62)$$

den wir wieder, nach Einführen des Widerstandes der Elektronenstrecke, in die zweite Darstellungsart mit u^2 überführen können.

5. Spannungsabhängigkeit des Richteffektes.

Da die angelegte Gleichspannung U_1 über v_1 (45) mit dem Laufwinkel w_1 zusammenhängt (61), führen wir diesen als Variable ein, wobei Elektrodenabstand x_1 und Frequenz ω konstant gehalten werden.

Für die Leerlaufrichtspannung

$$\Delta U_i = 4 \frac{K}{\varepsilon_0^2 \omega^4} Q \cdot \frac{\mathfrak{S}^2}{4} \quad (47)$$

ergibt sich die Spannungsabhängigkeit aus der Funktion Q (43), die entsprechend umgeformt wird.

Wir drücken in Q die Variable u_1 mit Hilfe von (61) durch w_1 aus. Es ist:

$$u_1 = \frac{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1}{w_1}$$

und somit

$$u_1 - 1 + 2h = \frac{3}{w_1} (z_1 - w_1 + h w_1),$$

$$\frac{u_1 - 1 + 2h}{u_1} = 3 \frac{z_1 - w_1 + h w_1}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1}.$$

Nach Umformung schreiben wir:

$$Q = 3 \frac{z_1 - w_1 + h w_1}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \left\{ \frac{1 - w_1 \cdot \sin w_1 - \cos w_1 + \frac{1}{2} w_1^2}{w_1^2} - (1 - \eta_1^2) \frac{w_1^2}{8} \right\} -$$

$$- (1 - \eta_1) \frac{w_1 \left(h - \frac{1}{2} \right)}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \left\{ 1 - \cos w_1 - \frac{1}{2} w_1^2 \right\} +$$

$$+ 3 \frac{z_1 - w_1 + h w_1}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \eta_2^2 \frac{w_1^2}{8} - \eta_2 \frac{w_1 \left(h - \frac{1}{2} \right)}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \{ w_1 - \sin w_1 \}. \quad (63)$$

Eine Änderung von w_1 beschreibt nach (61) die Abhängigkeit vom Arbeitspunkt. Der virtuelle Laufwinkel z_1 ist vorgegeben und fungiert zusammen mit der Kathodengüte h und dem Sättigungsmaß η als Parameter.

Einer Spannung $U_1 \rightarrow \infty$ ($v_1 \rightarrow \infty$) entspricht ein Laufwinkel $w_1 \rightarrow 0$, der Spannung $U_1 = 0$ ($v_1 = v_0$) der Laufwinkel

$$w_{1\text{zul}} = \frac{3 z_1}{3 - h}. \quad (64)$$

Der Laufwinkel w_1 darf die in (64) angegebene Größe nicht übersteigen, da sonst die angelegte Gleichspannung U_1 negativ wird und unsere Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren.

In der zweiten Darstellungsart mit u^2 haben wir r_1 einzuführen; wir bekommen mit (48) und (57):

$$\Delta U_l = 4 \frac{K}{\varepsilon_0^2 \omega^4} Q \cdot \frac{\varepsilon_0^2 \omega^2}{x_1^2} \frac{w_1^2}{36} \cdot \left\{ \frac{u_1 + 2 - h}{u_1 - 1 + 2h} \right\}^2 \cdot \frac{(z_1 - w_1 + h w_1)^2}{w_1^6} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{u^2}{4} \quad (65)$$

mit

$$N^2 = \left[\frac{\Delta_0}{w_1^3} (z_1 - w_1 + h w_1) - \frac{1}{3} \left\{ (1 - \eta_1) \left(h \frac{f_{\pi/2}}{w_1} + \frac{1}{2} g_{\pi/2} \right) - \eta_2 \left(h \frac{f_0}{w_1} + \frac{1}{2} g_0 \right) \right\} \right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{\Delta_{\pi/2}}{w_1^3} (z_1 - w_1 + h w_1) - \frac{1}{3} \left\{ (1 - \eta_1) \left(h \frac{f_0}{w_1} + \frac{1}{2} g_0 \right) + \eta_2 \left(h \frac{f_{\pi/2}}{w_1} + \frac{1}{2} g_{\pi/2} \right) \right\} - \frac{z_1}{6} \right]^2. \quad (66)$$

In (65) kürzen wir und schreiben:

$$\Delta U_l = \frac{1}{9} \cdot \frac{K}{x_1^2 \omega^2} \cdot w_1^2 M \cdot \frac{u^2}{4} \quad (67)$$

unter Einführung der maßgebenden Funktion

$$w_1^2 M = z_1^2 \cdot \frac{Q}{N^2}. \quad (68)$$

Mit diesem Ausdruck wird die Spannungsabhängigkeit von ΔU_l in der Darstellung (67) beschrieben, während früher in der Darstellung (47) nur die Funktion Q (63) maßgebend war.

Die Spannungsabhängigkeit des Kurzschlußrichtstromes

$$\Delta J_k = -8 \frac{K}{\varepsilon_0 x_1 \omega^3} \cdot \frac{Q^*}{w_1} \cdot \frac{S^2}{4} \quad (69)$$

finden wir in dem Ausdruck

$$\frac{Q^*}{w_1} = \left\{ 1 + \frac{h}{u_1} \right\} \cdot \frac{Q}{w_1} = \frac{3 z_1 - 2 w_1 + 2 h w_1}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \frac{Q}{w_1}, \quad (70)$$

wenn wieder, wie früher, eine entsprechende Umformung vorgenommen wird. In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$\Delta J_k = -\frac{2}{9} \cdot \frac{K \varepsilon_0}{x_1^3 \omega} \cdot w_1 M^* \cdot \frac{11^2}{4} \quad (71)$$

mit

$$w_1 M^* = \left\{ 1 + \frac{h}{u_1} \right\} w_1 M = \frac{3 z_1 - 2 w_1 + 2 h w_1}{3 z_1 - 2 w_1 + h w_1} \cdot \frac{z_1^2}{w_1} \cdot \frac{Q}{N^2} \quad (72)$$

als maßgebende Funktion.

In den Formeln (47) und (69) bzw. (67) und (71) haben wir die exakte Lösung für unser gestelltes Problem in Rücksicht auf quadratische Verhältnisse, wobei wir allerdings die Abhängigkeit des Sättigungsmaßes η von der Frequenz, von der Lage des Arbeitspunktes auf der Raumladungskennlinie und von der Phasenlage der Feldstärke an der Kathode nur punktweise berücksichtigen können.

6. Spannungsabhängigkeit des Kurzschlußrichtstromes bei großen Laufwinkeln; der „Doehler“-Effekt.

In diesem Abschnitt soll die Untersuchung der Spannungsabhängigkeit für den Fall großer Laufwinkel durchgeführt werden und versucht werden, eine theoretische Begründung des „Doehler“-Effektes zu finden.

Wir haben bereits in der Einleitung erwähnt, daß dieser Effekt dadurch gekennzeichnet ist, daß im Gebiete der Dezi- und Zentimeterwellen der Kurzschlußrichtstrom einen maximalen Wert erreicht, wenn der Arbeitspunkt in den flacheren Teil der Kennlinie verlagert wird. Eine weitere Verschiebung des Arbeitspunktes durch Vergrößern der angelegten Gleichspannung bewirkt eine Abnahme des Kurzschlußstromes und sogar einen Vorzeichenwechsel desselben.

Da in unserer Darstellung nicht die Gleichspannung direkt auftritt, sondern der Laufwinkel w_1 als Variable, müssen wir die Beziehung

$$w_1 = \frac{3 z_1}{u_1 + 2 - h} \quad (61)$$

heranziehen, worin der virtuelle Laufwinkel z_1 als Parameter erscheint.

Schließen wir uns dem von Doehler untersuchten Frequenzgebiet an, so können wir uns auf große Werte von z_1 beschränken und, da wir verhältnismäßig niedrige Gleichspannungen U_1 (zirka 0 bis 100 V) verwenden, die Untersuchung auf große Laufwinkel w_1 spezialisieren. Dabei wollen wir auch die Verhältnisse für eine ideale Kathode ($h = 1$) voraussetzen. Diese Annahme ist insofern berechtigt, als wir erkennen, daß eine geringe Abweichung der Kathodengüte h von 1 in der maßgebenden Funktion (72) bei großen Laufwinkeln w_1 keinen besonderen Einfluß hat. Außerdem wird man bei experimentellen Untersuchungen immer eine hochaktive Kathode verwenden, die einer idealen Kathode ($h = 1$) ziemlich nahe kommt.

Die Beziehung (61) vereinfacht sich dann zu

$$w_1 = \frac{3 z_1}{u_1 + 1} \quad (73)$$

und der zulässige größte Laufwinkel wird nach (64)

$$w_{1 \text{ zul}} = \frac{3}{2} z_1. \quad (74)$$

In der Funktion $w_1 \cdot M^*$ (72) entwickeln wir die vorkommenden Ausdrücke für große Laufwinkel.

Es wird:

$$\frac{1 - w_1 \cdot \sin w_1 - \cos w_1 + \frac{1}{2} w_1^2}{w_1^2} \xrightarrow{w_1 \gg \pi/2} \frac{1}{2},$$

$$\left(1 - \cos w_1 - \frac{1}{2} w_1^2 \right)_{w_1 \gg \pi/2} \rightarrow -\frac{1}{2} w_1^2, \quad (w_1 - \sin w_1)_{w_1 \gg \pi/2} \rightarrow w_1;$$

für die Funktion N^2 ergibt sich

$$N^2_{w_1 \gg \pi/2} \rightarrow \frac{z_1^2}{36},$$

da alle anderen Glieder bei $w_1 \gg \frac{\pi}{2}$ gegen $\frac{z_1^2}{36}$ zu vernachlässigen sind. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} w_1 M^*_{h=1, w_1 \gg \pi/2} &= (w_1 M^*) = \\ &= \frac{3}{(3z_1 - w_1)^2} \cdot \frac{z_1^3}{w_1} \cdot \left[3z_1 \left\{ \frac{1}{2} - (1 - \eta_1^2) \frac{w_1^2}{8} \right\} + (1 - \eta_1) \frac{w_1^3}{4} + \eta_2^2 3z_1 \frac{w_1^2}{8} - \eta_2 \frac{w_1^2}{2} \right] \cdot \frac{36}{z_1^2} \\ \text{oder} \\ (w_1 M^*) &= \frac{27}{(3z_1 - w_1)^2} \cdot \frac{z_1}{w_1} \cdot \left\{ 6z_1 - 3z_1(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) \frac{w_1^2}{2} - 2\eta_2 w_1^2 + (1 - \eta_1) w_1^3 \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Diese verhältnismäßig einfache Funktion gibt uns die Abhängigkeit des Kurzschlußstromes ΔJ_h von der Lage des Arbeitspunktes auf der statischen Kennlinie bei großen Laufwinkeln an.

Es erweist sich weiterhin als günstig, statt der Variablen w_1 die Variable u_1 einzuführen. Mit Hilfe von (73) ergibt die Umformung:

$$\begin{aligned} (w_1 M^*) &= \frac{3}{z_1} \cdot \frac{1}{u_1^2} \cdot \\ &\cdot \left[2(u_1 + 1)^3 - \frac{9}{2} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) (u_1 + 1) - 6z_1 \eta_2 (u_1 + 1) + 9z_1^2 (1 - \eta_1) \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Die Nullstellen dieser Funktion erhalten wir aus der Gleichung

$$(u_1 + 1)^3 - \left\{ \frac{9}{4} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + 3z_1 \eta_2 \right\} (u_1 + 1) + \frac{9}{2} z_1^2 (1 - \eta_1) = 0, \quad (77)$$

die eine Gleichung dritten Grades in $(u_1 + 1)$ darstellt.

Mit der Substitution

$$(u_1 + 1) = y$$

erhalten wir die reduzierte Gleichung

$$y^3 + 3p y + 2q = 0,$$

wobei

$$p = - \left\{ \frac{3}{4} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + z_1 \eta_2 \right\}$$

und

$$q = \frac{9}{4} z_1^2 (1 - \eta_1).$$

Ist nun

$$q^2 + p^3 < 0,$$

dann hat die kubische Gleichung drei reelle, verschiedene Lösungen; bei

$$q^2 + p^3 = 0$$

ergeben sich zwei reelle, verschiedene Lösungen, von denen eine doppelt zählt und endlich bei

$$q^2 + p^3 > 0$$

haben wir eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. In unserem Falle ist

$$q^2 + p^3 = z_1^3 \left[\frac{81}{16} z_1 (1 - \eta_1)^2 - \left\{ \frac{3}{4} z_1 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2 \right\}^3 \right]. \quad (78)$$

Nach Gl. (77) ist eine reelle Lösung negativ, weil das konstante Glied positives Vorzeichen hat. Zur Erklärung des „Doehler“-Effektes bleibt uns nur der Fall

$$q^2 + p^3 < 0,$$

weil dann das Maximum des Richteffektes zwischen den beiden positiven, reellen Nullstellen der Gl. (77) liegt.

Vor der Diskussion des Ausdruckes für $q^2 + p^3$ stellen wir einige Überlegungen an.

In den Untersuchungen dieses Abschnittes beziehen wir uns auf große Laufwinkel und damit eigentlich auf sehr hohe Frequenzen. In diesem Frequenzgebiet nähert sich das Sättigungsmaß dem oberen asymptotischen Grenzfall der wechselstrommäßigen Sättigung, das heißt physikalisch, daß die Raumladung bei diesen raschen Schwingungen nicht mehr imstande ist, ihre kompensierende Wirkung vollständig durchführen zu können. Der Wechselstrom $p \cdot \sin \varphi$ an der Kathode wird fast nur von einem Verschiebungsstrom getragen werden. Die Komponente η_1 nähert sich also dem Wert Eins, der allerdings nur bei unendlich hoher Frequenz erreicht wird, während die Komponente η_2 verschwindend klein wird [siehe Ausdruck (10)].

In der Nähe dieses oberen Grenzwertes dürften wir aber annehmen, daß die Abhängigkeit des Sättigungsmaßes von der Lage des Arbeitspunktes auf der Kennlinie zu vernachlässigen ist. Für eine bestimmte Frequenz können wir das Sättigungsmaß als einen konstanten Parameter betrachten.

Als Nächstes haben wir die Frage nach der Größe des virtuellen Laufwinkels z_1 zu lösen. Damit unsere Beschränkung auf große Laufwinkel w_1 ihre Gültigkeit behält, müssen wir einen minimalen Wert von w_1 angeben, der bei zirka 5π liegen wird.

Aus (73) kann dann ein minimaler Wert von z_1 errechnet werden, wobei angenommen wird, daß die Spannungsabhängigkeit von $u_1 = 1$ bis zirka $u_1 = 17$ verfolgt werden soll. Dies würde bei $U_0 = 0.25$ V bis zu $U_1 = 72$ V führen.

Damit ergibt sich nach (73):

$$z_{1 \min} = \frac{w_{1 \min} (u_1 + 1)}{3} = \frac{5\pi \cdot 18}{3} = 30\pi. \quad (79)$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zur Diskussion des Ausdruckes $q^2 + p^3$ (78) zurück.

Wir stellen die Bedingung

$$q^2 + p^3 \leq 0$$

in der (η_1, η_2) -Ebene dar.

Für den Fall

$$q^2 + p^3 = 0$$

ergibt sich für ein bestimmtes z_1 eine Grenzkurve, die das Gebiet

$$q^2 + p^3 < 0,$$

in dem der „Doehler“-Effekt möglich ist, von dem Gebiet

$$q^2 + p^3 > 0$$

scheidet.

Die Gleichung dieser Grenzkurve finden wir aus (78) mit:

$$\frac{3}{4} z_1 \eta_2^2 - \eta_2 + \left(\frac{81}{16}\right)^{1/3} \cdot z_1^{1/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} - \frac{3}{4} z_1 (1 - \eta_1^2) = 0 \quad (80)$$

oder

$$\eta_{2I, II} = \frac{2}{3z_1} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - 3 \left(\frac{81}{16}\right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} + \frac{9}{4} z_1^2 (1 - \eta_1^2)} \right]. \quad (81)$$

Die Kurve zerfällt also in zwei Äste, die sich in einem Punkte schneiden; die Ordinate dieses Punktes ist

$$\eta_{2s} = \frac{2}{3z_1}.$$

Da der Schnittpunkt der beiden Kurvenäste bei einem positiven η_2 -Wert liegt, muß der untere, im Negativen beginnende Zweig die η_1 -Achse schneiden.

Für $\eta_1 = 1$ wird

$$\eta_{2I,II} = 0, \frac{4}{3z_1}$$

und für $\eta_1 = 0$

$$\eta_{2I,II} = \frac{2}{3z_1} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - 3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} + \frac{9}{4} z_1^2} \right].$$

Für sehr große Werte des virtuellen Laufwinkels z_1 nähert sich die Gl. (80) der Grenzkurve der Kreisgleichung

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1. \quad (82)$$

Die Grenzkurve (80) für ein gewisses z_1 liegt innerhalb dieses Kreises, siehe Abb. 4.

Die Messungen Doehlers zeigen zwischen zirka 13 und 60 cm Wellenlänge immer ein Maximum des Richteffektes, so daß zumindest für diesen Frequenzbereich angenommen werden muß, daß die Bedingung gilt:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 < 1. \quad (83)$$

Das bedeutet, daß der Betrag $|\eta|$ des Sättigungsmaßes kleiner als Eins sein muß.

Um die Lage der Wurzeln von Gl. (77) zu finden, stellen wir in der (η_1, η_2) -Ebene diese Gleichung dar. Sie ergibt sich als Gleichung einer Kreisschar mit u_{10} als Parameter

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{2}{u_{10} + 1} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3z_1} \cdot \eta_2 - \frac{9z_1^2(u_{10} - 1) - 4(u_{10} + 1)^3}{9z_1^2(u_{10} + 1)} = 0, \quad (84)$$

wenn angenommen wird, daß u_{10} eine positive Wurzel sei. Die Mittelpunkte dieser Kreisschar liegen auf einer zur η_1 -Achse parallelen Geraden im Abstände

$$b = \frac{2}{3z_1}.$$

Die Größe des Vorzeichens, das die Funktion $(w_1 M^*)$ an der Stelle $u_1 = 1$ annimmt, erhalten wir nach (76) aus

$$(w_1 M^*)_{u_1=1} = \frac{3}{z_1} \cdot \{16 + 9z_1^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_1) - 12z_1\eta_2\};$$

der geklammerte Term bestimmt das Vorzeichen.

Die Bestimmung der Lage des Maximums führt wieder auf eine kubische Gleichung in $(u_1 + 1)$. Für ein vorgegebenes z_1 tragen wir wieder eine einparametrische Kreisschar in der (η_1, η_2) -Ebene ein, die es ermöglicht, die Lage des Maximums abzuschätzen.

Durch Differenzieren von (76) erhalten wir als Extrembedingung:

$$\frac{d(w_1 M^*)}{du_1} = 0 = \frac{3}{z_1} \cdot \frac{1}{u_1^2} \cdot \left[6(u_1 + 1)^2 - \left\{ \frac{9}{2} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + 6z_1\eta_2 \right\} \right] -$$

$$- \frac{3}{z_1} \cdot \frac{2u_1}{u_1^4} \left[2(u_1 + 1)^3 - \left\{ \frac{9}{2} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + 6z_1\eta_2 \right\} (u_1 + 1) + 9z_1^2 (1 - \eta_1) \right]$$

oder weiterhin

$$2(u_1 + 1)^2(u_1 - 2) + \left\{ \frac{9}{2} z_1^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) + 6z_1\eta_2 \right\} (u_1 + 2) - 18z_1^2 (1 - \eta_1) = 0$$

und nach Umformung

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{4}{u_{1m} + 2} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3z_1} \cdot \eta_2 - \frac{(u_{1m} - 2) \{ 9z_1^2 + 4(u_{1m} + 1)^2 \}}{9z_1^2(u_{1m} + 2)} = 0. \quad (85)$$

Dies ist die Gleichung einer Kreisschar mit dem Parameter u_{1m} . Sie stellt den geometrischen Ort aller Wertepaare (η_1, η_2) dar, für die ein Extrem auf ein bestimmtes

$u_1 = u_{1m}$ fällt. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer zur η_1 -Achse parallelen Geraden im Abstande

$$b = \frac{2}{3z_1}.$$

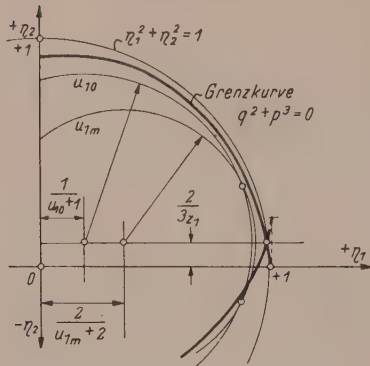


Abb. 4. Grenzkurve in der (η_1, η_2) -Ebene.

Die eben besprochenen Verhältnisse sind in Abb. 4 dargestellt. Von den beiden Kreisscharen wurde je ein Kreis eingezeichnet: Die Schnittpunkte dieser beiden Kreise entsprechen einem positiven Wert für den Realteil η_1 des Sättigungsmaßes und zwei möglichen Werten für den Imaginärteil η_2 , von denen einer negativ ist. Es interessiert die Frage, welche Lage die beiden Schnittpunkte in bezug auf die Grenzkurve einnehmen. Aus den Gl. (84) und (85), die wir in etwas abgekürzter Form anschreiben:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{2}{u_{10} + 1} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3z_1} \cdot \eta_2 - A_0 = 0, \quad (84)$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{4}{u_{1m} + 2} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3z_1} \cdot \eta_2 - A_m = 0, \quad (85)$$

bestimmen wir die Koordinaten der Schnittpunkte, wobei sich ein gewisser Wert für η_1 ergibt, zu dem zwei Werte für η_2 gehören, die sich mit

$$\eta_{2I, II}^* = \frac{2}{3z_1} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{9}{4} z_1^2 \cdot \eta_1^2 + \frac{9}{4} z_1^2 \cdot A_0 + \frac{9}{4} z_1^2 \frac{2}{u_{10} + 1} \cdot \eta_1} \right] \quad (86)$$

errechnen.

Wir vergleichen diese η_2^* -Werte mit jenen, die bei demselben η_1 auf der Grenzkurve liegen; letztere sind durch

$$\eta_{2I, II} = \frac{2}{3z_1} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - 3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} + \frac{9}{4} z_1^2 (1 - \eta_1^2)} \right] \quad (81)$$

gegeben.

Nehmen wir an, daß der obere Schnittpunkt (mit positivem η_2) innerhalb der Grenzkurve liegt, dann muß sein:

$$\eta_{2I} > \eta_{2I}^*,$$

oder nach (81) und (86):

$$1 - 3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} + \frac{9}{4} z_1^2 (1 - \eta_1^2) > 1 - \frac{9}{4} z_1^2 \cdot \eta_1^2 + \frac{9}{4} z_1^2 \cdot A_0 + \frac{9}{4} z_1^2 \cdot \frac{2}{u_{10} + 1}.$$

Diese Ungleichung vereinfachen wir zu:

$$\frac{9}{4} z_1^2 - 3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} > \frac{9}{4} z_1^2 \cdot \left\{ \frac{u_{10} - 1}{u_{10} + 1} + \frac{2 \eta_1}{u_{10} + 1} \right\} - (u_{10} + 1)^2. \quad (87)$$

Bei den hier in Betracht kommenden Werten der Parameter ($z_1 \geq 30\pi$, $\eta_1 \approx 1$) ergibt sich weiterhin:

$$\frac{9}{4} z_1^2 - 3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} > \frac{9}{4} z_1^2 - (u_{10} + 1)^2$$

oder

$$3 \left(\frac{81}{16} \right)^{1/3} \cdot z_1^{4/3} \cdot (1 - \eta_1)^{2/3} < (u_{10} + 1)^2. \quad (88)$$

Diese Bedingung wird für die interessierenden Werte von u_{10} (zirka 15 bis 20) immer erfüllt sein. Daher ist unsere Annahme berechtigt, daß der obere Schnittpunkt innerhalb der Grenzkurve liegt.

Zugleich mit der Ungleichung (87) bzw. (88) ist aber auch nachgewiesen, daß gilt:

$$|\eta_{2II}| < |\eta_{2II}^*|,$$

das heißt der untere Schnittpunkt muß außerhalb der Grenzkurve liegen, für diese Werte des Sättigungsmaßes kann kein „Doehler“-Effekt auftreten. Die negativen

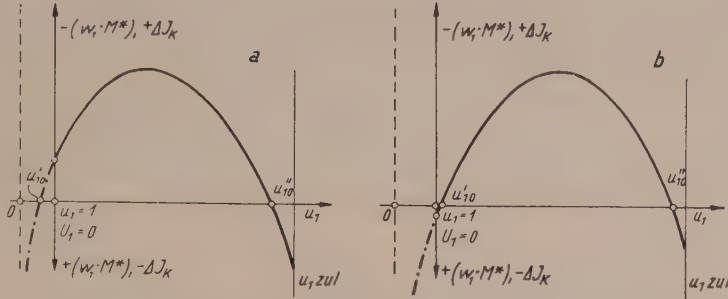


Abb. 5. Verlauf des Kurzschlußrichtstromes ΔJ_k in Abhängigkeit von der angelegten Gleichspannung U_1 .

Werte des Imaginärteils η_2 sind also auszuschließen; wir müssen annehmen, daß bei hohen Frequenzen die imaginäre Komponente des Sättigungsmaßes positiv ist und mit wachsender Frequenz verschwindend klein wird.

Den prinzipiellen Verlauf der Funktion $(w_1 M^*)$ in Abhängigkeit von u_1 — womit auch nach (71) der Verlauf des Kurzschlußrichtstromes ΔJ_k gegeben ist — zeigt Abb. 5.

An der Stelle $u_1 = 0$ wird die Funktion unendlich. Die Stelle $u_1 = 1$ entspricht dem Koordinatenursprung, weil hier die Variable U_1 (angelegte Gleichspannung) mit dem Werte $U_1 = 0$ beginnt.

Im Fall a) der Abb. 5 ist $u_{10}' < 1$, die Funktion $(w_1 M^*)$ beginnt hier mit negativem Vorzeichen, das heißt der Kurzschlußrichtstrom ΔJ_k ist positiv bei $u_1 = 1$ oder $U_1 = 0$.

Das Gegenteil gilt für den Fall b), wo $(w_1 M^*)$ mit positivem, ΔJ_k mit negativem Vorzeichen beginnt, da die erste Nullstelle u_{10} über dem Werte $u_1 = 1$ liegt.

Wir sehen, daß der gezeigte Kurvenverlauf mit dem experimentell von Doehler gefundenen prinzipiell übereinstimmt.

Zur Überprüfung der vorliegenden Theorie verwenden wir ein Meßergebnis Doehlers². Allerdings dürfen wir nur eine mehr qualitative Übereinstimmung erwarten, weil Doehler für seine Messungen eine Diode mit zylindrischem Aufbau verwendete, während unsere Betrachtungen für eine ebene Anordnung Geltung haben. Des weiteren haben wir darauf zu achten, daß der uns interessierende Kurvenverlauf des Kurzschlußrichtstromes in Abhängigkeit von der angelegten Gleichspannung innerhalb des Gültigkeitsbereiches des korrigierten Raumladungsgesetzes verbleibt.

Anstatt an Hand der Angaben Doehlers den Kurvenverlauf nachzurechnen, wollen wir den Wert des Sättigungsmaßes bestimmen und überprüfen, ob dieser in der erwarteten Größenordnung liegt. Doehler verwendete eine zylindrische Diode mit einem Anodendurchmesser von $d_a = 6$ mm; die Kathode bestand aus einem Wolframfaden

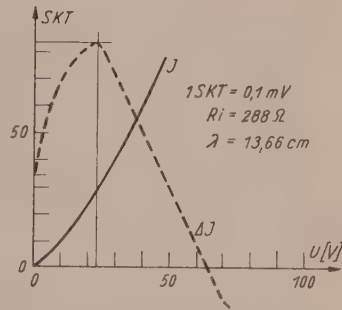


Abb. 6. Gemessener Verlauf des Richtstromes ΔJ nach Doehler bei einer Wellenlänge von 13,66 cm.

mit einer Stärke von $d_h = 50 \mu$, der auf eine Temperatur $T = 2400^\circ \text{K}$ erhitzt wurde. Abb. 6 zeigt den gemessenen Verlauf des Richtungsstromes bei einer Wellenlänge $\lambda = 13.66 \text{ cm}$ ($f = 2.2 \cdot 10^9 \text{ Hz}$). Dazu ist zu bemerken, daß das zur Messung dienende Instrument einen Widerstand von 288Ω hatte, so daß der gemessene Richtstrom nur annähernd dem Kurzschlußstrom entspricht.

Wir entnehmen der Abbildung, daß das Maximum bei der Anodenspannung $U_{1m} = 23 \text{ V}$ und der nachfolgende Nulldurchgang bei $U_{10} = 65 \text{ V}$ liegt. Nach unseren Ausführungen ist für die Spannung U_0 zu setzen:

$$U_0 = 2 \frac{k \cdot T}{e} = 2 \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2400}{1.60 \cdot 10^{-19}} = 0.4 \text{ V},$$

damit erhalten wir für die Geschwindigkeit:

$$v_0 = 5.93 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{U_0} = 5.93 \cdot 10^7 \cdot 0.4^{1/2} = 3.75 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Der virtuelle Laufwinkel wird:

$$z_1 = \frac{x_1 \omega}{v_0} = \frac{0.3 \cdot 2\pi \cdot 2.2 \cdot 10^9}{3.75 \cdot 10^7} = 110 \div 35\pi;$$

dieser Wert liegt über $z_{1\min} = 30\pi$, so daß die am Anfang dieses Abschnittes gemachten Vernachlässigungen zu Recht bestehen. Die Vorzeichenumkehr des Richteffectes erfolgt bei $U_{10} = 65 \text{ V}$; dementsprechend wird das Geschwindigkeitsverhältnis

$$u_{10} = \frac{v_{10}}{v_0} = \sqrt{\frac{U_{10} + U_0}{U_0}} = \sqrt{\frac{65.4}{0.4}} = 12.79;$$

damit ergibt sich für Gl. (84):

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{2}{13.79} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3 \cdot 110} \cdot \eta_2 - \frac{9 \cdot 110^2 \cdot 11.79 - 4 \cdot 13.79^3}{9 \cdot 110^2 \cdot 13.79} = 0$$

oder

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - 0.145 \cdot \eta_1 - 0.0121 \cdot \eta_2 - 0.847 = 0.$$

Das Maximum des Richteffectes liegt bei $U_{1m} = 23 \text{ V}$; somit ist

$$u_{1m} = \frac{v_{1m}}{v_0} = \sqrt{\frac{U_{1m} + U_0}{U_0}} = \sqrt{\frac{23.4}{0.4}} = 7.64.$$

Daher wird für Gl. (85):

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{4}{9.64} \cdot \eta_1 - \frac{4}{3 \cdot 110} \cdot \eta_2 - \frac{5.64 \cdot \{9 \cdot 110^2 + 4 \cdot 8.64^3\}}{9 \cdot 110^2 \cdot 9.64} = 0$$

oder

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - 0.415 \cdot \eta_1 - 0.0121 \cdot \eta_2 - 0.584 = 0.$$

Aus den beiden quadratischen Gleichungen errechnen wir die Komponenten des Sättigungsmaßes mit

$$\eta_1 = 0.975$$

und

$$\eta_2 = +0.201, (-0.189).$$

Der negative Wert von η_2 hat, wie wir wissen, keine physikalische Bedeutung. Die erhaltenen Werte liegen also durchaus in der erwarteten Größenordnung. Der Absolutwert des Sättigungsmaßes ergibt sich mit

$$|\eta| = 0.996.$$

Zur Überprüfung rechnen wir mit den obigen Werten der Komponenten des Sättigungsmaßes den Ausdruck (78) für $q^2 + p^3$ nach. Es ergibt sich

$$q^2 + p^3 = -3509 < 0.$$

Da dieser Ausdruck negativ ist, ist die Bedingung für das Auftreten des „Doehler“-Effektes erfüllt.

7. Zusammenfassung.

In vorliegender Arbeit wird der Einfluß der Elektronenlaufzeit auf den Gleichrichtereffekt an Dioden untersucht. Es wird von den Grundgleichungen einer ebenen Elektronenströmung⁴ ausgegangen unter Berücksichtigung der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode, wobei diese Austrittsgeschwindigkeit von gleicher Größe für alle Elektronen angenommen wird. Die tatsächliche Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung wird im Raumladungsgesetz durch Anwendung des korrigierten Raumladungsgesetzes³, das auf einer einheitlichen Austrittsgeschwindigkeit beruht, weitgehend angenähert, wobei für die äquivalente Spannung der austretenden Elektronen der doppelte Betrag der mittleren Voltgeschwindigkeit der Maxwell-Verteilung zu setzen ist.

Das wechselstrommäßige Verhalten der Kathode wird durch das Sättigungsmaß³ berücksichtigt. Dieses Sättigungsmaß gibt das Verhältnis des Verschiebungsstromes an der Kathode zu dem gesamten, über die Kathode geführten Wechselstrom an und bestimmt die Wechselfeldstärke an der Kathode. Während in der zitierten Arbeit³ das Sättigungsmaß nur als eine reelle Größe vorausgesetzt wird und nur andeutungsweise auf das Bestehen einer imaginären Komponente hingewiesen wird, tritt hier eine Erweiterung insofern ein, als das Sättigungsmaß als komplexe Größe eingeführt wird. Damit wird auch die Phasenlage des Verschiebungsstromes gegenüber dem gesamten Wechselstrom erfaßt. Es zeigt sich, daß diese Erweiterung zur Erklärung des „Doehler“-Effektes unerlässlich ist.

Durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes über das Integral der Feldstärke ergibt sich ein Ausdruck für die Leerlaufrichtspannung in Abhängigkeit von dem Quadrat der Amplitude des zugeführten Wechselstromes. Die gebräuchliche Darstellung in Abhängigkeit von der Wechselspannung wird durch Einführen des Widerstandes der Elektronenstrecke gewonnen. Weiters wird ein Ausdruck für den Kurzschlußrichtstrom erhalten, indem auf das korrigierte Raumladungsgesetz Bezug genommen wird.

In der Folge werden Formeln für die Spannungsabhängigkeit des Richteffektes im allgemeinen aufgestellt. Die Diskussion über die Spannungsabhängigkeit für den Kurzschlußrichtstrom wird auf den Fall großer Laufwinkel erstreckt und eine Erklärung des „Doehler“-Effektes ermöglicht. Dabei genügt eine Beschränkung auf die ideale Kathode ($h = 1$). Die Komponenten des Sättigungsmaßes können in dem hier betrachteten Gebiet hoher Frequenzen als spannungsunabhängig angesehen werden und treten als frequenzabhängige Parameter auf. In der (η_1, η_2) -Ebene kennzeichnet eine gefundene Grenzkurve das Gebiet des „Doehler“-Effektes, wobei nachgewiesen wird, daß die imaginäre Komponente des Sättigungsmaßes bei hohen Frequenzen positiv sein muß, wenn für das Sättigungsmaß der Ansatz

$$\eta = \eta_1 - j \eta_2$$

gemacht wird.

Der gefundene theoretische Verlauf des Kurzschlußrichtstromes in Abhängigkeit von der an die Diode gelegten Gleichspannung stimmt prinzipiell mit den Messungen Doehlers² überein, und zwar sowohl hinsichtlich des auftretenden maximalen Wertes, als auch bezüglich der Richtungsumkehr des Richtstromes.

An Hand eines Meßergebnisses² wird der Wert des Sättigungsmaßes nachgerechnet, das in die erwartete Größenordnung fällt.

(Eingegangen am 18. Januar 1949.)

Bemerkung zur Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe mit starren, gelenkig verbundenen Randstäben.

Von Johannes Dörr, Paris.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Es wird eine parallelogrammförmige Scheibe betrachtet, die an den Rändern mit unendlich steifen, in den vier Eckpunkten gelenkig verbundenen Stäben abgestützt ist. Es werden die elastischen Spannungen in der Scheibe exakt bestimmt unter der Voraussetzung, daß das System nur durch in den Randstäben angreifende Kräfte belastet wird.

Summary. We consider a plate having the shape of a parallelogram, bordered by four beams of infinite rigidity, pin-jointed in the four corners of the parallelogram. The elastic stresses in the plate are calculated with the condition that the external forces are only acting on the boundary beams in the plane of the plate.

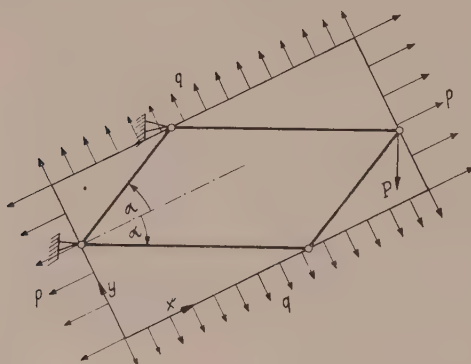
Résumé. On considère une plaque de la forme d'un parallélogramme, encadrée par des poutres infiniment rigides mais articulées dans les quatre coins. Les efforts élastiques de la plaque sont déterminés sous la condition, que les forces extérieures n'agissent que sur les poutres de la bordure et dans le plan du parallélogramme.

I. Aufgabenstellung.

Es sei ein parallelogrammförmiges Gelenkviereck mit unendlich steifen Stäben gegeben. Das Gelenkviereck sei mit einer homogenen Scheibe konstanter Dicke ausgefüllt, die an den Rändern fest mit den Stäben verbunden ist. Wir denken uns dieses System in zwei benachbarten Eckpunkten fest gelagert und durch Kräfte belastet, die in der Ebene des Parallelogramms wirken und an den Randstäben angreifen. Wir wollen das durch diese Belastung in der Scheibe erzeugte Spannungsfeld und die zugehörigen Verformungen bestimmen.

II. Lösung der Aufgabe.

Wir denken uns die parallelogrammförmige Scheibe in eine rechteckige Scheibe eingefügt, und zwar derart, daß die Rechteckseiten parallel zu den Winkelhalbierenden



des Parallelogramms laufen, wie es die Abbildung zeigt. Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) ein, so daß zwei Seiten des Rechtecks parallel zur x -Achse und die beiden anderen Seiten parallel zur y -Achse verlaufen. Die rechteckige Scheibe denken wir uns durch konstante Belegungen von Randkräften belastet, die senkrecht zu den Rändern wirken und für je zwei gegenüberliegende Ränder entgegengesetzt gleich sind. Die Kraftbelegung in x -Richtung sei p , die in y -Richtung sei q . Diese Belegung von Randkräften erzeugt ein homogenes Span-

nungsfeld. Eine auf der Scheibe gekennzeichnete gerade Linie wird durch ein homogenes Spannungsfeld in eine ebenfalls gerade Linie überführt. Dabei erfährt a aber die Gerade im allgemeinen eine Dehnung. Das dem Rechteck eingeschriebene Parallelogramm wird also durch ein homogenes Spannungsfeld in ein Parallelogramm überführt, welches im allgemeinen andere Seitenlängen hat. Da das Parallelogramm von unendlich steifen Randstäben eingefasst ist, dürfen die Ränder weder Krümmungen noch Dehnungen erleiden. Man kann nun aber das Verhältnis $p : q$ der Randkraftbelegungen so bestimmen, daß alle vier Seiten des dem Rechteck eingeschriebenen Parallelogramms keine Dehnungen erfahren. In diesem Falle ist das durch p und q erzeugte Spannungs- und Dehnungs-

feld im Einklang mit den Randbedingungen unseres Problems und unsere Aufgabe ist damit gelöst.

Die Randkraftbelegungen p und q rufen folgende homogenen Dehnungen hervor:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E d} \left(p - \frac{q}{m} \right); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E d} \left(q - \frac{p}{m} \right). \quad (1)$$

Daraus lassen sich die Dehnungen der Seiten des dem Rechteck einbeschriebenen Parallelogramms bestimmen. Man findet für alle vier Seiten denselben Wert

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha.$$

Wegen der Randbedingungen unseres Problems muß ε Null sein. Aus dieser Forderung erhält man, wenn man für ε_x und ε_y die Ausdrücke (1) einsetzt:

$$\frac{p}{q} = \frac{1 - m \operatorname{tg}^2 \alpha}{m - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (2a)$$

Da p und q senkrecht aufeinander stehen, stellen

$$\sigma_x = \frac{p}{d} \quad \text{und} \quad \sigma_y = \frac{q}{d} \quad (2b)$$

die Hauptspannungen der Scheibe dar. Diese Hauptspannungen zeigen in Richtung der Winkelhalbierenden des Parallelogramms.

Durch das Spannungsfeld wird der Winkel 2α des Parallelogramms in den Winkel $2(\alpha + \beta)$ überführt. Es sei

$$\beta \ll \alpha \quad \text{und} \quad \beta \ll \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Bei der in unserem Fall vorhandenen homogenen Deformation der Scheibe gilt dann:

$$\varepsilon_x = -\beta \operatorname{tg} \alpha; \quad \varepsilon_y = \beta \operatorname{cotg} \alpha. \quad (3)$$

Setzt man hier die Ausdrücke (1) ein, so stellt (3) ein Gleichungssystem für p und q dar, wenn β vorgegeben ist. Man findet daraus für die Hauptspannungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \frac{p}{d} &= \beta E \frac{m}{m^2 - 1} (\operatorname{cotg} \alpha - m \operatorname{tg} \alpha) \\ \sigma_y = \frac{q}{d} &= \beta E \frac{m}{m^2 - 1} (m \operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Man sieht leicht, daß diese beiden Ausdrücke die Bedingung (2a) befriedigen.

Die gesamte, in der parallelogrammförmigen Scheibe aufgespeicherte Verformungsarbeit ist

$$U = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x F d + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y F d,$$

wenn F der Flächeninhalt des Parallelogramms ist. Mit den Ausdrücken (3) und (4) erhält man daraus:

$$U = \beta^2 E F d \frac{m}{m^2 - 1} \left(m \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - 1 \right). \quad (5)$$

Wir kennen jetzt die Hauptspannungen und die Verformungsarbeit der parallelogrammförmigen Scheibe, wenn ihr durch äußere, an den Randstäben angreifende Kräfte eine bestimmte Verformung aufgezwungen wird. Die Verformung wird dabei beschrieben durch die Winkeländerung β , wobei also $2(\alpha + \beta)$ die Gesamtgröße des diesbezüglichen Winkels des Parallelogramms ist. Damit können wir jetzt alle technisch bedeutsamen Fragen für das betrachtete elastische System beantworten.

Als Beispiel stellen wir uns folgende Aufgabe: Am äußersten freien Eckpunkt des Systems wirke eine Einzelkraft P senkrecht zum waagrechten Randstab, dessen Länge a sei. Wir wollen wissen, wie stark sich der Eckpunkt unter der Last durch-

senkt und wie groß die Hauptspannungen in der Scheibe sind. Wir drücken die Durchsenkung s durch β aus:

$$s = a 2 \beta.$$

Die Arbeit der Kraft P ist dann

$$A = \frac{1}{2} P s = P a \beta.$$

Diese Arbeit muß gleich der durch (5) angegebenen Verformungsarbeit U des Systems sein. Daraus findet man:

$$\beta = \frac{P a}{E F d} \frac{m^2 - 1}{m} \frac{1}{m \frac{1 + \cos^2 2 \alpha}{\sin^2 2 \alpha} - 1}.$$

Durch Einsetzen von β in (4) erhält man die Hauptspannungen.

III. Technische Bedeutung des behandelten Problems.

Schiefwinklige Blechfelder sind in letzter Zeit insbesondere für den Flugzeugbau bedeutungsvoll geworden, nachdem man erkannt hatte, daß bei Hochgeschwindigkeitsflugzeugen der gepfeilte Flügel bemerkenswerte aerodynamische Vorteile bringt. Bei solchen gepfeilten Flügeln muß man die Hauptrippen parallel zur Flugrichtung anbringen, um gute aerodynamische Formgebungen zu erreichen. So entstehen zwischen den Hauptrippen und den gepfeilten Hauptholmen schiefwinklige Felder. Die strenge Elastizitätstheoretische Behandlung schiefwinkliger Platten und Scheiben macht große Schwierigkeiten. Exakte oder angenäherte Lösungen in handlicher Form sind noch so gut wie unbekannt. Im vorhergehenden wurde für den Grenzfall, daß die schiefwinklige, parallelogrammförmige Scheibe von unendlich steifen, gelenkig verbundenen Randstäben eingefast ist, die strenge Lösung einer bestimmten Problemstellung angegeben. Diese Lösung wird eine brauchbare Näherung darstellen, wenn die Stäbe sehr steif sind. Nach Ansicht von W. Flügge könnte deshalb diese Sonderlösung als Grundlage dienen bei der Untersuchung von elastischen Systemen, die sich aus parallelogrammförmigen Blechfeldern mit Randstäben zusammensetzen. Aus diesem Grunde wurde diese kurze Mitteilung einer Veröffentlichung wert gehalten.

(Eingegangen am 16. Februar 1949.)

(Aus dem Institut für angewandte Physik der Technischen Hochschule in Wien und der Abteilung für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G. in Berlin.)

Apertur und Blenden magnetischer Übermikroskope.

Von W. Glaser und H. Robl.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Ausgehend von allgemeinen Eigenschaften der Elektronenbahnen in rotationssymmetrischen Feldern, wird die Entstehung des engsten Bündelquerschnittes im Kathodensystem erklärt. Für Abbildungsfelder, wie sie in den Elektronenlinsen der magnetischen Übermikroskope Verwendung finden, wird die Apertur der Objektbestrahlung als Funktion der Brechkraft des Kondensors und Objektivs bestimmt. Im Anschluß an die Berechnung der Achsenneigung bestimmter Strahlenbündel im Objekt werden die Eigenschaften von drei nach gewissen Gesichtspunkten ausgewählten Blenden untersucht.

Summary. Based on the general properties of electronic orbits in axially-symmetric fields, the formation of the crossover in the cathode system is explained. For image forming fields, as they are used in the magnetic lenses of electron microscopes, the aperture of the irradiating electron beam is determined as a function of the refracting power of the condenser and the objective. Following the calculation of the axial inclination of certain bundles of rays in the object, the properties of three diaphragms selected from special points of view are discussed.

Résumé. Partant des propriétés générales des trajectoires électroniques dans les champs à symétrie de révolution, on explique la formation de la section transversale la plus étroite dans le système cathodique. Pour les champs utilisés dans les lentilles magnétiques des microscopes électroniques, l'ouverture de l'irradiation objective est déterminée comme fonction du pouvoir réfracteur du condenseur et de l'objectif. A la suite du calcul de l'inclinaison axiale de certains faisceaux de rayons dans l'objet, on examine les propriétés de trois diaphragmes sélectionnés d'après certains points de vue.

Die Größe der Bestrahlungsapertur des Objekts hat Bedeutung für Bildhelligkeit, Tiefenschärfe und Auflösungsvermögen. Strahlenbegrenzende materielle Blenden dienen zur Verringerung der Abbildungsfehler und Kontraststeuerung. Der Einfluß der Brechkraft des Kondensors auf die Apertur der Objektbestrahlung wurde erstmalig von Ruska und von Borries¹ mit lichtoptischen Formeln unter Voraussetzung eines geradlinigen Strahlenganges untersucht. Die Wirkung des Objektivs blieb dabei im wesentlichen unberücksichtigt. Eine weitere, mit lichtoptischen Hilfsmitteln und geradlinigem Strahlengang durchgeführte Diskussion des Beleuchtungssystems der Elektronenmikroskope stammt von Hillier und Baker². Die exakte Berechnung der Bestrahlungsapertur des Objekts als Funktion der Brechkraft von Kondensor und Objektiv für ein von uns³ angegebenes und durchgerechnetes magnetisches Abbildungsfeld ist Marton und Hutter⁴ zu verdanken. Die Apertur der Objektbestrahlung wird von ihnen für den Fall angegeben, daß sich das Objekt in der Mitte des Objektivfeldes befindet. Da es sich jedoch beim Übermikroskop stets um so hohe Vergrößerungen handelt, daß das Objekt praktisch in die Brennebene fällt, kann bei gegebener Objektlage über die Brechkraft des Objektivs nicht mehr frei verfügt werden. Will man daher den Einfluß des Objektivs auf die Apertur der Objektbestrahlung verfolgen, so muß die Objektlage durch die Brechkraft des Objektivs bestimmt werden. Da wir in der Zwischenzeit den Gültigkeitsbereich unserer Ausdrücke für die Elektronenbahnen in magnetischen Abbildungsfeldern auch auf allgemeinere Feldtypen ausgedehnt haben, wollen wir diese erweiterten Formeln, die auf jedes empirisch gegebene Glockenfeld anwendbar sind, unserer Rechnung zugrunde legen. Weiters haben Marton und Hutter Größe und Lage einer Blende an der Stelle des maximalen Achsenabstandes einer die Mitte des Objekts schneidenden Bahn angegeben. Eine solche Blende beeinflußt die Apertur von Objektpunkten, die von der Achse verschiedene Entfernung besitzen, in ungleicher Weise. Ellis⁵ hat dagegen als Blendenort auf graphischem Wege jene Ebene bestimmt, in der sich zwei Meridianstrahlen schneiden, welche das Objekt mit gleichem Neigungswinkel gegen die Achse verlassen. Wir werden zeigen, daß sich in der Tat auch windschiefe Strahlen, welche im Objekt den gleichen Neigungswinkel gegen die Achse besitzen, in einem Kreis schneiden und für seinen Ort und Radius einfache Formeln angeben, deren Auswertung der graphischen Darstellung mindestens zweier Bahnen vorzuziehen ist. Außerdem wird eine Blende besprochen, welche genau alle aus dem engsten Bündelquerschnitt kommenden und im Objekt nicht gestreuten Strahlen einschließt.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Überlegung. Sind $u(z)$ und $w(z)$ zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung achsennaher Bahnen in rotations-symmetrischen elektrisch-magnetischen Feldern, so läßt sich jede Bahn in der Form

$$r(z) = \mathfrak{A} u(z) + \mathfrak{B} w(z) \quad (1)$$

¹ B. von Borries und E. Ruska: Z. techn. Physik **20**, 225 (1939).

² J. Hillier und R. F. Baker: J. appl. Physics **16**, 469 (1945).

³ W. Glaser: Z. Physik **117**, 285 (1941).

⁴ L. Marton und R. G. E. Hutter: Physic. Rev. **65**, 161 (1944).

⁵ S. G. Ellis: Canad. J. Res., Sect. A **25**, 322 (1947).

darstellen⁶, wobei $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ zwei konstante Vektoren bedeuten und mit $r(z)$ ein von der Achse ausgehender und auf dieser senkrecht stehender Vektor bezeichnet ist, dessen beide Komponenten auf ein mit der Winkelgeschwindigkeit $e B_z/2m$ um die Achse rotierendes Koordinatensystem bezogen sind. Für einen Strahl, der in der Ebene $z = z_1$ durch den Punkt $r(z_1)$ hindurchgeht und dort die Ableitung $r'(z_1)$ besitzt, bestimmen sich die beiden Konstanten der Gl. (1) aus

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} u(z_1) + \mathfrak{B} w(z_1) &= r(z_1), \\ \mathfrak{U} u'(z_1) + \mathfrak{B} w'(z_1) &= r'(z_1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Man findet für $z = z_2$

$$\left. \begin{aligned} r(z_2) &= r(z_1) \frac{u(z_2) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_2)}{u(z_1) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_1)}, \\ &+ r'(z_1) \frac{u(z_1) w(z_2) - u(z_2) w(z_1)}{u(z_1) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Man sieht sofort, daß $r(z_2)$ bei gegebenem $r(z_1)$ unabhängig von $r'(z_1)$ wird, wenn

$$u(z_1) w(z_2) - u(z_2) w(z_1) = 0, \quad (4)$$

also

$$\frac{u(z_2)}{w(z_2)} = \frac{u(z_1)}{w(z_1)}. \quad (5)$$

Dabei ist

$$r(z_2) = r(z_1) \frac{u(z_2) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_2)}{u(z_1) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_1)}. \quad (6)$$

Hebt man im Zähler dieses Ausdruckes $w(z_2)$, im Nenner dagegen $w(z_1)$ heraus, so folgt nach Gl. (5):

$$r(z_2) = r(z_1) \frac{w(z_2)}{w(z_1)} \quad \text{oder} \quad r(z_2) = r(z_1) \frac{u(z_2)}{u(z_1)} \quad (7)$$

eine bereits früher⁷, zugleich mit der Abbildungsgleichung (5) angegebene Formel für die Vergrößerung. Gl. (3) zeigt aber auch, daß $r(z_2)$ bei gegebenem $r'(z_1)$ unabhängig von $r(z_1)$ wird, wenn

$$u(z_2) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_2) = 0, \quad (8)$$

also

$$\frac{u(z_2)}{w(z_2)} = \frac{u'(z_1)}{w'(z_1)}. \quad (9)$$

Dabei wird

$$r(z_2) = r'(z_1) \frac{u(z_1) w(z_2) - u(z_2) w(z_1)}{u(z_1) w'(z_1) - u'(z_1) w(z_1)}. \quad (10)$$

Hebt man im Zähler dieses Ausdruckes $w(z_2)$, im Nenner dagegen $w'(z_1)$ heraus, so folgt nach Gl. (9):

$$r(z_2) = r'(z_1) \frac{w(z_2)}{w'(z_1)} \quad \text{oder} \quad r(z_2) = r'(z_1) \frac{u(z_2)}{u'(z_1)}. \quad (11)$$

Wird also in einem beliebigen Punkt der Ebene $z = z_1$ der durch $|r'(z_1)| = \text{tg } \alpha$ bestimmte Neigungswinkel einer Bahn gegen eine Achsenparallele durch den Punkt festgehalten und nur die Richtung verändert, so wandert der Schnittpunkt der Bahn mit der durch Gl. (9) bestimmten Ebene $z = z_2$ auf einem Kreis mit dem Radius

$$r = \text{tg } \alpha \frac{u(z_2)}{u'(z_1)}. \quad (12)$$

Damit ist gezeigt, daß auch windschiefe Strahlen, welche in einer beliebigen achsen-normalen Ebene den gleichen Neigungswinkel gegen die Achse besitzen, in einer

⁶ W. Glaser und E. Lammell: Ann. Physik 40, 367 (1941).

⁷ W. Glaser: Z. Physik 117, 285 (1941).

bestimmten Ebene durch einen gemeinsamen Kreis hindurchgehen. Diese Feststellung wird im folgenden wiederholt Verwendung finden.

Mit Hilfe der Gl. (9) und (12) kann zunächst die Entstehung des engsten Bündelquerschnittes in dem Beleuchtungssystem eines Übermikroskops erklärt werden. Für das Potential gilt unter Vernachlässigung der Raumladung die bekannte Entwicklung:

$$\varphi(r, z) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \dots, \quad (13)$$

wonach

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Phi'(z) - \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{r}{2} \Phi''(z) + \dots \quad (14)$$

In der Ebene der Kathode $z = 0$ ist $\varphi(r, 0) = 0$, also auch $\Phi(0) = \Phi'(0) = \dots = 0$. Nahe der Kathode wird daher die Radialkomponente der Feldstärke gegenüber der Axialkomponente zu vernachlässigen sein, so daß auch solche Elektronen, die mit dem Potential ε von der Kathode streifend austreten, in eine achsenparallele Richtung gelenkt werden. Nehmen wir an, daß die Bedingung $|\partial \varphi / \partial r| \ll |\partial \varphi / \partial z|$ für $z \leq \delta_{\max}$ erfüllt ist. In diesem Bereich ist der Neigungswinkel der Bahn durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Phi(z)}} \quad (15)$$

gegeben. Für $z \geq \delta_{\min}$ sei dieser Winkel bereits sehr klein. Dann werden in einer Ebene $z = \delta$, wo $\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max}$, die bei der Herleitung der Differentialgleichung achsennaher Bahnen benützten Voraussetzungen erfüllt. Setzt man nun in Gl. (9) $z_1 = \delta$ und $z_2 = z_Q$, so folgt:

$$\frac{u(z_Q)}{w(z_Q)} = \frac{u'(\delta)}{w'(\delta)}. \quad (16)$$

Außerdem erhält man aus Gl. (12) und Gl. (15) mit $z = \delta$ für den Radius des engsten Bündelquerschnittes

$$r_Q = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Phi(\delta)}} \frac{u(z_Q)}{u'(\delta)}. \quad (17)$$

Dabei kann δ in dem angegebenen Bereich willkürlich gewählt werden.

Der Feldverlauf in Polschuhlinen läßt sich meist durch die Funktion

$$B(z) = B_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \quad (18)$$

für die Feldstärke $B(z)$ auf der Achse mit genügender Genauigkeit darstellen. In diesem Fall sind die beiden unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen bekanntlich durch

$$u(z) = \frac{\sin \omega z}{\sin \varphi}, \quad w(z) = \frac{\cos \omega z}{\sin \varphi}, \quad (19)$$

mit

$$\varphi = \arccot \frac{z}{a}, \quad \omega = \sqrt{1 + k^2} \quad (20)$$

und

$$k^2 = \frac{e}{8mU} B_0^2 a^2 \quad (21)$$

gegeben. Bei hoher Elektronengeschwindigkeit ist in dieser Formel m durch die Ruhmasse m_0 und die Beschleunigungsspannung U durch den Ausdruck $U(1 + eU/2m_0c^2)$ zu ersetzen. Häufig haben aber die verwendeten magnetischen Abbildungsfelder einen steileren Abfall als er durch Gl. (18) gegeben ist. Wie an anderer Stelle⁸ ausführlich gezeigt wird, können auch dann für die Differentialgleichung der

⁸ W. Glaser: Ann. d. Phys. Bd. 7, Heft 5, 1950.

achsennahen Bahnen die angegebenen Lösungen verwendet werden, wenn in Gl. (20) und (21) an Stelle der Halbwertbreite des Feldes der Gl. (18) die Länge

$$a = \sqrt{-2 \frac{B_0}{B''_{z=0}}} \quad (22)$$

eingeführt wird. Dieser Wert von a wird allen folgenden Rechnungen zugrunde gelegt. Die angegebenen Lösungen gelten dann mit ausreichender Genauigkeit für jedes empirisch gegebene Glockenfeld. Eine Bahn, welche die Achse in $\varphi = \varphi_1$ schneidet, ist durch

$$r = C \frac{\sin \omega (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \varphi} \quad (23)$$

bestimmt. Man findet für den nächsten Schnittpunkt mit der Achse in $\varphi = \varphi_2$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{\omega}. \quad (24)$$

Darnach ergibt sich mit $\varphi_2 = 0$ für den ersten dingseitigen Brennpunkt

$$\varphi_F = \frac{\pi}{\omega}. \quad (25)$$

Für die Brennweite erhält man nach Abb. 1:

$$\frac{r(0)}{f} = \frac{dr(\varphi_F)}{dz}, \quad (26)$$

also

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} \sin \frac{\pi}{\omega}. \quad (27)$$

Die Apertur der Objektbestrahlung wird nun zunächst für den Fall berechnet, daß sich das Objekt außerhalb des Objektivfeldes befindet. Entsprechend Abb. 2

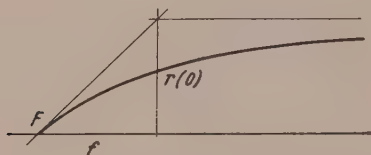


Abb. 1. Definition der Brennweite.

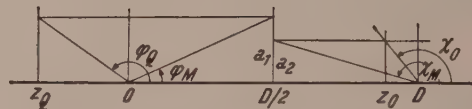


Abb. 2. Zur Berechnung der Apertur der Objektbestrahlung: Engster Bündelquerschnitt in $z = z_Q$, Mitte des Kondensorfeldes in $z = z_0$, Objekt in $z = z_0$ und Mitte des Objektivfeldes in $z = D$.

besitze der engste Bündelquerschnitt des Beleuchtungssystems die Abszisse z_Q , das Objekt die Abszisse z_0 . Alle Parameter des Kondensorfeldes seien durch den Index 1 gekennzeichnet. Die Gleichung der Elektronenbahn, welche durch einen Randpunkt des engsten Bündelquerschnittes mit dem Radius r_Q hindurchgeht und das Objekt in der Achse trifft, ist dann durch

$$r = r_Q \frac{\sin \varphi_Q}{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_0)} \cdot \frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad (28)$$

gegeben, denn r wird an der Stelle $\varphi = \varphi_Q$ gleich r_Q und verschwindet für $\varphi = \varphi_0$. Aus

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r_Q}{a_1} \frac{\sin \varphi_Q}{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_0)} \{ \sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi - \omega_1 \cos \omega_1 (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \} \quad (29)$$

findet man mit $\tan \alpha = dr(\varphi_0)/dz$:

$$\tan \alpha = - \frac{r_Q}{a_1} \frac{\omega_1 \sin \varphi_Q \sin \varphi_0}{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_0)}. \quad (30)$$

Für $\omega_1 (\varphi_Q - \varphi_0) = n \pi$ ($n = 1, 2, \dots$) wird der engste Bündelquerschnitt auf die Objektebene abgebildet. Da sich in diesem Fall alle durch den Mittelpunkt des engsten

Bündelquerschnittes hindurchgehenden Bahnen im Achsenpunkt des Objekts schneiden, wird dabei α — wie es sein muß — unbestimmt. Die untere Kurve in Abb. 3 stellt $|\operatorname{tg} \alpha|$ in Abhängigkeit vom Kehrwert der Brennweite des Kondensors dar. Es wurden die Werte $r_Q = 0.025$, $a_1 = 1.0$, $z_Q = -68$, $z_0 = 194$ mm verwendet.

Die Gl. (30) gilt so lange, als der Achsenabstand des Strahles im Kondensor kleiner ist als die Polschuhbohrung vom Radius A . Nach Gl. (28) wird diese Bedingung durch die Ungleichung

$$\frac{\sin \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right)}{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_0)} \sin \varphi_Q < \frac{A}{r_Q} \quad (31)$$

ausgedrückt. Ist hingegen die linke Seite dieser Gleichung größer als A , so wirkt die Kondensoröffnung als materielle Blende. Man erhält in diesem Fall den Aperturwinkel α^* , indem man in Gl. (30) r_Q durch A und φ_Q durch $\pi/2$ ersetzt. Es ist also

$$\operatorname{tg} \alpha^* = - \frac{A}{a_1} \frac{\omega_1 \sin \varphi_0}{\sin \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right)}. \quad (32)$$

Tatsächlich liegt bei Übermikroskopen das Objekt im Feld der Objektlinse, doch kann die Mitte zwischen Kondensor und Objektiv als feldfrei vorausgesetzt werden. Der Abstand des Objekts vom Kondensor sei D . Die Hilfswinkel bezüglich des Kondensors werden mit φ , bezüglich des Objektivs mit χ bezeichnet. Die Parameter des Kondensors und Objektivs sollen durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden. Dann gilt für die Mittelebene:

$$\cot \varphi_M = \frac{D}{2a_1}, \quad \cot \chi_M = - \frac{D}{2a_2}. \quad (33)$$

Die Bahngleichung im Kondensorgebiet ist durch

$$r_1 = C_1 \frac{\sin \omega_1 \varphi}{\sin \varphi} + C_2 \frac{\cos \omega_1 \varphi}{\sin \varphi} \quad (34)$$

mit

$$z = a_1 \cot \varphi \quad (35)$$

die Bahngleichung im Objektivgebiet durch

$$r_2 = C \frac{\sin \omega_2 (\chi - \chi_0)}{\sin \chi} \quad (36)$$

mit

$$z = D + a_2 \cot \chi, \quad (37)$$

gegeben, da r_2 an der Stelle $\chi = \chi_0$ verschwinden muß. Die Konstanten C_1 , C_2 und C bestimmen sich durch die Zusammenfügung der beiden Bahnen in der Mittelebene und die Bedingung, daß die Elektronenbahn durch den Randpunkt des engsten

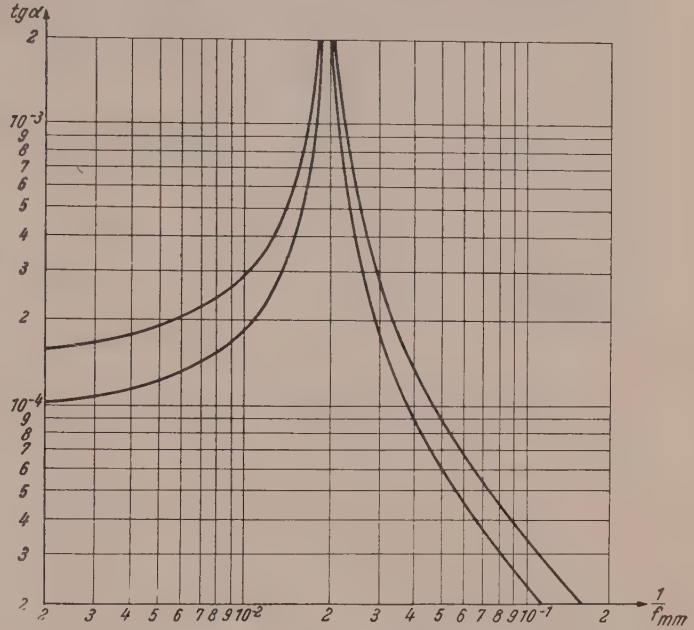


Abb. 3. Die Apertur der Objektbestrahlung $|\operatorname{tg} \alpha|$ in Abhängigkeit von der Brechkraft $1/f$ des Kondensors. Untere Kurve für Objekt außerhalb des Objektivfeldes, obere Kurve für Objekt im Objektivfeld.

Bündelquerschnittes verläuft. Aus der Übereinstimmung des Achsenabstandes und der Bahnneigung in der Mittelebene folgen die Beziehungen:

$$r_1(\varphi_M) = r_2(\chi_M) \quad (38)$$

und

$$\frac{dr_1(\varphi_M)}{dz} = \frac{dr_2(\chi_M)}{dz}. \quad (39)$$

Der Bahnverlauf durch den Randpunkt des engsten Bündelquerschnittes fordert

$$r_1(\varphi_Q) = r_Q. \quad (40)$$

Mit

$$\frac{dr_1}{dz} = \frac{1}{a_1} \{C_1(\sin \omega_1 \varphi \cos \varphi - \omega_1 \cos \omega_1 \varphi \sin \varphi) + C_2(\cos \omega_1 \varphi \cos \varphi + \omega_1 \sin \omega_1 \varphi \sin \varphi)\} \quad (41)$$

und

$$\frac{dr_2}{dz} = \frac{C}{a_2} \{\sin \omega_2 (\chi - \chi_0) \cos \chi - \omega_2 \cos \omega_2 (\chi - \chi_0) \sin \chi\} \quad (42)$$

ergeben die Gl. (38), (39) und (40) drei Bestimmungsgleichungen für C_1 , C_2 und C , nämlich

$$C_1 \sin \omega_1 \varphi_Q + C_2 \cos \omega_1 \varphi_Q = r_Q \sin \varphi_Q \quad (43)$$

sowie

$$C_1 \sin \omega_1 \varphi_M + C_2 \cos \omega_1 \varphi_M = C \frac{\sin \varphi_M}{\sin \chi_M} \sin \omega_2 (\chi_M - \chi_0) \quad (44)$$

und

$$\left. \begin{aligned} & C_1 (\sin \omega_1 \varphi_M \cos \varphi_M - \omega_1 \cos \omega_1 \varphi_M \sin \varphi_M) \\ & + C_2 (\cos \omega_1 \varphi_M \cos \varphi_M + \omega_1 \sin \omega_1 \varphi_M \sin \varphi_M) \\ & = C \frac{a_1}{a_2} \{\sin \omega_2 (\chi_M - \chi_0) \cos \chi_M - \omega_2 \cos \omega_2 (\chi_M - \chi_0) \sin \chi_M\}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Der Aperturwinkel α ergibt sich aus $\tan \alpha = dr_2(\chi_0)/dz$ zu

$$\tan \alpha = -\frac{C}{a_2} \omega_2 \sin \chi_0. \quad (46)$$

Nach Berechnung von C und Einführung von

$$K_1 = \sqrt{\frac{D^2 + 4a_2^2}{D^2 + 4a_1^2}} (z_Q^2 + a_1^2) \frac{\sin \omega_2 (\chi_M - \chi_0)}{\sin \chi_0}, \quad (47)$$

$$K_2 = \frac{a_2}{a_1} \sqrt{\frac{D^2 + 4a_1^2}{D^2 + 4a_2^2}} (z_Q^2 + a_1^2) \frac{1}{\sin \chi_0} \left\{ \omega_2 \cos \omega_2 (\chi_M - \chi_0) + \frac{D}{2a_2} \sin \omega_2 (\chi_M - \chi_0) \right\}$$

erhält man

$$\tan \alpha = \frac{-r_Q \omega_2}{K_1 \cos \omega_1 (\varphi_M - \varphi_Q) + \left(\frac{D}{2a_1} K_1 + K_2 \right) \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_M)}. \quad (48)$$

Indem man das Objekt in die Mittelebene rückt, also χ_0 durch χ_M und φ_M durch φ_0 ersetzt, kann leicht gezeigt werden, daß bei Objektlage im feldfreien Gebiet die Gl. (48) in Gl. (30) übergeht. Bei hoher Vergrößerung ist $\chi_0 = \pi/\omega_2$. Da $D \gg a_2$, $D \gg a_1$, $|z_Q| \gg a_1$ und z_Q negativ, kann dann für K_1 und K_2 die Näherung

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= z_Q \frac{\sin \omega_2 \chi_M}{\sin \frac{\pi}{\omega_2}}, \\ K_2 &= z_Q \frac{a_2}{a_1} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\omega_2}} \left(\omega_2 \cos \omega_2 \chi_M + \frac{D}{2a_2} \sin \omega_2 \chi_M \right) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

verwendet werden. Das erste Glied in der Klammer des Ausdruckes für K_2 wird dabei im allgemeinen gegenüber dem zweiten zu vernachlässigen sein. Wie eingangs erwähnt wurde, haben Marton und Hutter den Aperturwinkel für den Spezialfall angegeben, daß sich das Objekt in der Mitte des Objektivfeldes befindet. Diese Spezialisierung wird in den Gl. (47) und (48) durch $\omega_2 = 2$ erreicht. Es ist dagegen unzulässig, für $\chi_0 = \pi/2$ und hohe Vergrößerung ω_2 als variabel zu betrachten. Zur Berechnung von $|\operatorname{tg} \alpha|$ als Funktion des Kehrwertes der Brennweite des Kondensors wurde außer den bereits angeführten Werten $a_2 = 0.8 \text{ mm}$, $k_2^2 = 1.5$ oder $\omega_2 = 1.58$ angenommen. Aus $\chi_0 = \pi/\omega_2$ wurde $D = 194.4 \text{ mm}$ bestimmt. Der Verlauf von $|\operatorname{tg} \alpha|$ wird durch die obere Kurve in Abb. 3 dargestellt. Ein Vergleich der beiden Kurven in Abb. 3 zeigt, wie stark der Aperturwinkel infolge der Bahnkrümmung im Feld des Objektivs

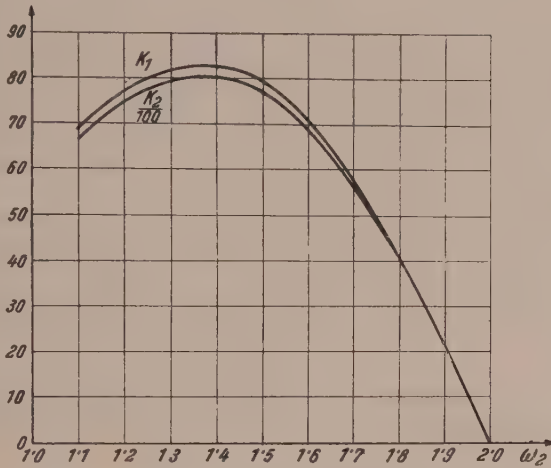


Abb. 4. Die Konstanten K_1 und K_2 der Gl. (49) als Funktionen des Objektivparameters ω_2 .

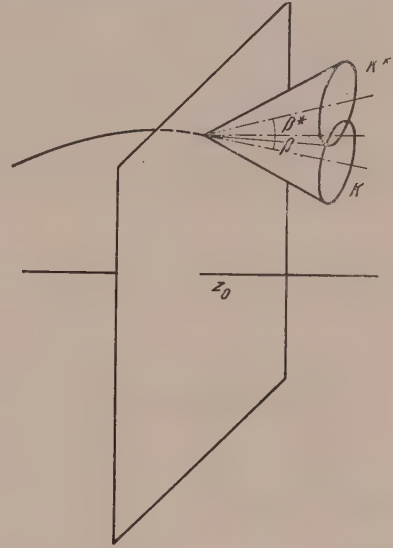


Abb. 5. Der Beleuchtungskegel K und Blendenkegel K^* mit den Achsenneigungswinkeln β und β^* .

vergrößert wird. Zur leichteren Berechnung des Aperturwinkels für andere Objektivstärken wurden die Werte von K_1 und K_2 unter Benutzung der bereits angegebenen Werte in Abb. 4 als Funktionen von ω_2 aufgetragen.

Um die Eigenschaften der Elektronenbahnen, die, aus dem engsten Bündelquerschnitt austretend, einen bestimmten Objektpunkt durchdringen, näher zu beschreiben, bestimmen wir die Konstanten von Gl. (1) durch eine Bahn, welche die Ebene $z = z_1$ im Punkt $r(z_1)$ und die Ebene $z = z_2$ im Punkt $r(z_2)$ schneidet. Man erhält dann für dr/dz in $z = z_2$:

$$\left. \begin{aligned} r'(z_2) = r(z_1) \frac{u'(z_2)w(z_2) - u(z_2)w'(z_2)}{u(z_1)w(z_2) - u(z_2)w(z_1)} \\ + r(z_2) \frac{u(z_1)w'(z_2) - u'(z_2)w(z_1)}{u(z_1)w(z_2) - u(z_2)w(z_1)} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Die Ableitung $r'(z_2)$ hängt sowohl von $r(z_1)$ als auch von $r(z_2)$ ab. Wir denken uns nun den Endpunkt des Vektors $r(z_2)$ festgehalten und den Vektor $r(z_1)$ ohne Änderung des Betrages um die Achse gedreht. Man erkennt, daß dann die Spitze des Vektors $r'(z_2)$ ebenfalls auf einem Kreis umläuft, dessen Mittelpunkt im allgemeinen gegen den Endpunkt des Vektors $r(z_2)$ radial verschoben ist. Für $z_1 = z_Q$ und $z_2 = z_0$ ist damit gezeigt, daß jene Bahnen, welche von dem Rand des engsten Bündelquerschnittes ausgehen, in dem Objektpunkt $r(z_0)$ den Mantel eines schiefen Kreiskegels berühren.

Dieser Kegel, den wir „Beleuchtungskegel“ nennen, entsteht aus einem geraden Kreiskegel, für dessen halben Öffnungswinkel α die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = r_Q \frac{u'(z_0) w(z_0) - u(z_0) w'(z_0)}{u(z_Q) w(z_0) - u(z_0) w(z_Q)} \quad (51)$$

gilt dadurch, daß seine Achse gegen die optische Achse mit

$$\operatorname{tg} \beta = r_0 \frac{u(z_Q) w'(z_0) - u'(z_0) w(z_Q)}{u(z_Q) w(z_0) - u(z_0) w(z_Q)} \quad (52)$$

geneigt wird. Die Achse des Beleuchtungskegels ist durch die Richtung jenes Strahles bestimmt, der vom Mittelpunkt des engsten Bündelquerschnittes ausgeht. Abb. 5 soll diesen Sachverhalt veranschaulichen. Unsere Feststellungen gelten in einem um die optische Achse rotierenden Koordinatensystem. In Bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem ist die Achse des Kegels auch in zirkularer Richtung verdreht. Zur expliziten Berechnung von $\operatorname{tg} \beta$ für glockenförmigen Feldverlauf in der Kondensor- und Objektivlinse bestimmen wir zunächst den Hilfswinkel χ_P eines Bildes des engsten Bündelquerschnittes im Objektivfeld. Zu diesem Zweck legen wir im Kondensorfeld eine Bahn durch die Mitte des engsten Bündelquerschnittes

$$r_1 = C \frac{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi)}{\sin \varphi} \quad (53)$$

und schreiben die Fortsetzung dieser Bahn im Objektivfeld in der Form:

$$r_2 = C_1 \frac{\sin \omega_2 \chi}{\sin \chi} + C_2 \frac{\cos \omega_2 \chi}{\sin \chi}. \quad (54)$$

Für den Schnittpunkt dieser Bahn mit der Achse folgt aus $r_2(\chi_P) = 0$

$$\operatorname{tg} \omega_2 \chi_P = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (55)$$

Wir berechnen C_1 und C_2 aus den Bedingungen

$$r_2(\chi_M) = r_1(\varphi_P), \quad \frac{dr_2(\chi_M)}{d\chi} = \frac{dr_1(\varphi_M)}{d\varphi}, \quad (56)$$

wo χ_M bzw. φ_M wieder die Hilfswinkel einer als feldfrei vorausgesetzten Mittelebene zwischen Kondensor und Objektiv bedeuten. Man findet:

$$\operatorname{tg} \omega_2 \chi_P = \frac{K_1 \Omega_2 - K_2 \Omega_1}{K_3 \Omega_2 - K_4 \Omega_1} \quad (57)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\sin \omega_2 \chi_M}{\sin \chi_M}, \\ K_2 &= \frac{1}{a_2} \{ \sin \omega_2 \chi_M \cos \chi_M - \omega_2 \cos \omega_2 \chi_M \sin \chi_M \}, \\ K_3 &= \frac{\cos \omega_2 \chi_M}{\sin \chi_M}, \\ K_4 &= \frac{1}{a_2} \{ \cos \omega_2 \chi_M \cos \chi_M + \omega_2 \sin \omega_2 \chi_M \sin \chi_M \}, \\ \Omega_1 &= \frac{\sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_M)}{\sin \varphi_M}, \\ \Omega_2 &= \frac{1}{a_1} \{ \sin \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_M) \cos \varphi_M + \omega_1 \cos \omega_1 (\varphi_Q - \varphi_M) \sin \varphi_M \}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Das Bild des engsten Bündelquerschnittes in χ_P fällt bei abgeschaltetem Kondensor, also $\omega_1 = 1$, praktisch in die bildseitige Brennebene des Objektivs in $\chi = \pi - \pi/\omega_2$.

Mit zunehmender Brechkraft des Kondensors wandert das Bild gegen die Objektebene, die bei hoher Vergrößerung nahezu mit der dingseitigen Brennebene des Objektivs in $\chi = \pi/\omega_2$ zusammenfällt. Bei weiterer Vergrößerung der Brechkraft des Kondensors verschiebt sich das erste Bild des engsten Bündelquerschnittes in $\chi = \chi_P$ von der Objektebene gegen den Kondensor, wobei ein zweites Bild in $\chi = \chi_P - \pi/\omega_2$ aus dem Unendlichen gegen die bildseitige Brennebene des Objektivs rückt. Für nicht zu kleine Werte der Kondensorbrechkraft, ω_1 etwa größer als 1, 2, fällt dieses Bild praktisch in die Brennebene. Denn wenn die Entfernung des engsten Bündelquerschnittes von der Mitte des Kondensorfeldes groß ist gegenüber der Brennweite des Kondensors, so entsteht das erste Bild des engsten Bündelquerschnittes nahe der bildseitigen Brennebene des Kondensors. Da die Entfernung dieses Bildes von der Mitte des Objektivfeldes wieder groß ist gegenüber der Brennweite des Objektivs, so gelangen trotz des Einflusses des Kondensorfeldes auf die von dem ersten Bild ausgehenden Elektronen nur nahezu achsenparallele Bahnen in das Objektiv. Für geringe Brechkraft des Kondensors, wie sie praktisch zur Anwendung kommt⁹, muß aber der Hilfswinkel χ_P des Bildes des engsten Bündelquerschnittes aus Gl. (57) und (58) ermittelt werden. Jede Bahn, die von der Mitte des engsten Bündelquerschnittes ausgeht, schneidet die Achse in $\chi = \chi_P$. Jene Bahn, die außerdem die Objektebene $\chi = \chi_0$ im Punkt r_0 trifft, ist durch

$$r = r_0 \frac{\sin \chi_0}{\sin \omega_2 (\chi_0 - \chi_P)} \frac{\sin \omega_2 (\chi - \chi_P)}{\sin \chi} \quad (59)$$

gegeben. Es folgt

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r_0}{a_2} \frac{\sin \chi_0}{\sin \omega_2 (\chi_0 - \chi_P)} \{ \sin \omega_2 (\chi - \chi_P) \cos \chi - \omega_2 \cos \omega_2 (\chi - \chi_P) \sin \chi \}. \quad (60)$$

Man erhält daher für die Neigung der Bahn in der Objektebene $\chi = \chi_0$ unter Berücksichtigung, daß bei hoher Vergrößerung $\chi_0 = \pi/\omega_2$,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_0}{a_2} \left\{ \omega_2 \cot \omega_2 \chi_P \sin^2 \frac{\pi}{\omega_2} + \sin \frac{\pi}{\omega_2} \cos \frac{\pi}{\omega_2} \right\}. \quad (61)$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\Phi(\chi_P) = \omega_2 \cot \omega_2 \chi_P \sin^2 \frac{\pi}{\omega_2} + \sin \frac{\pi}{\omega_2} \cos \frac{\pi}{\omega_2}, \quad (62)$$

so wird

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_0}{a_2} \Phi(\chi_P). \quad (63)$$

Man beachte, daß $\operatorname{tg} \beta$ dem Abstand des Objektpunktes von der Achse proportional ist und die Beziehung $\Phi(\chi_P) = \Phi(\chi_P - \pi/\omega_2)$ besteht. Mit zunehmender Brechkraft des Kondensors sinkt die Funktion $\Phi(\chi_P)$ gegen $-\infty$, springt auf $+\infty$ und fällt neuerdings. Für die Nullstelle gilt $\operatorname{tg} \omega_2 \chi_P = -\omega_2 \operatorname{tg} \pi/\omega_2$. Die Sprungstelle befindet sich bei $\chi_P = \pi/\omega_2$. Bei negativen Werten von $\Phi(\chi_P)$ ist die Achse des Beleuchtungskegels zur optischen Achse, bei positiven Werten dagegen von ihr weggerichtet. Der Verlauf von $\Phi(\chi_P)$ für $0 < \chi_P < \pi/\omega_2$ und $\omega_2 = 1.58$ ist in Abb. 6 dargestellt. Die Nullstelle liegt bei $\chi_P = 47^\circ$.

Ersetzt man in Gl. (50) z_1 durch die Koordinate einer Blende z_B und z_2 durch die Koordinate der Objektebene z_0 , so erkennt man, daß alle Strahlen, die den Blendenrand berühren, im Objektpunkt (z_0) auf dem Mantel eines im allgemeinen schiefen Kreiskegels liegen, den wir „Blendenkegel“ nennen. Um den Neigungswinkel β^*

⁹ M. von Ardenne: Elektronen-Übermikroskopie. — V. K. Zworykin: Electron Optics and the Electron Microscope.

der Achse des Blendenkegels gegen die optische Achse zu bestimmen, ersetzen wir in Gl. (61) χ_P durch den Hilfswinkel der Blende χ_B und erhalten dann

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{r_0}{a_2} \Phi^*(\chi_B) \quad (64)$$

mit der Abkürzung

$$\Phi^*(\chi_B) = \omega_2 \cot \omega_2 \chi_B \sin^2 \frac{\pi}{\omega_2} + \sin \frac{\pi}{\omega_2} \cos \frac{\pi}{\omega_2}. \quad (65)$$

Um die gegenseitige Lage des Beleuchtungskegels und Blendenkegels zu studieren, denkt man sich zweckmäßig beide Kegel mit der Ebene $z = z_0 + a_2$ zum Schnitt gebracht. Als Schnittkurven entstehen gemäß Abb. 7 zwei Kreise K und K^* mit dem Radius $a_2 \operatorname{tg} \alpha^{10}$, deren Mittelpunkte auf einer Geraden durch die optische Achse liegen und von der Projektion des Objektpunktes auf die Schnittebene die Abstände

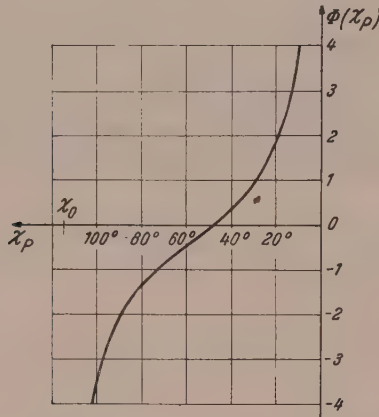


Abb. 6. Die Funktion $\Phi(\chi_P)$ zur Berechnung der Achsenneigung β des Beleuchtungskegels.

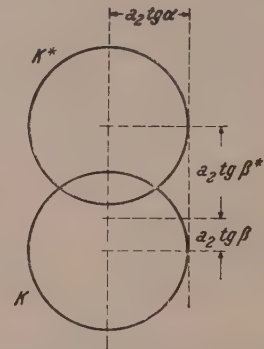


Abb. 7. Die Schnittkreise K und K^* des Beleuchtungskegels und Blendenkegels in der Ebene $z = z_0 + a_2$.

$a_2 \operatorname{tg} \beta = r_0 \Phi(\chi_P)$ und $a_2 \operatorname{tg} \beta^* = r_0 \Phi^*(\chi_B)$ besitzen. Im allgemeinen wird nur ein Teil der im Beleuchtungskegel verlaufenden Strahlen innerhalb des Blendenkegels liegen und durch die entsprechende Blende hindurchtreten. Die Mittelpunkte der Kreise K und K^* mögen um einen Bruchteil κ ihres Durchmessers $2 a_2 \operatorname{tg} \alpha$ voneinander entfernt sein. Dann wird

$$r_0 (\Phi^* - \Phi) = \kappa 2 a_2 \operatorname{tg} \alpha \quad (66)$$

oder

$$r_0 = 2 a_2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\Phi^* - \Phi} \kappa. \quad (67)$$

Es sei F_G die den Kreisen K und K^* gemeinsame Fläche und F die Fläche jedes Kreises. Dann kann der Quotient $F_G/F = \sigma$ leicht als Funktion von κ dargestellt werden, wie dies in Abb. 8 geschehen ist. Der Verlauf der Funktion $\kappa(\sigma)$ gibt im Verein mit Gl. (67) einen gewissen Aufschluß über den Helligkeitsabfall, der infolge der Verschiedenheit der Achsen des Beleuchtungskegels und Blendenkegels im Endbild gegen den Rand des Gesichtsfeldes eintritt. Berührung der beiden Kegel erfolgt bei $\kappa = 1$. Der zugehörige Wert von r_0 gibt dann den Radius des in der Abbildung beleuchtet erscheinenden Gesichtsfeldes an.

Für den Radius einer hinter dem Objekt liegenden Blende, welche die Elektronenbahnen einschließt, die in der Objektebene die optische Achse unter einem Winkel $\leq \alpha$ schneiden, läßt sich eine einfache Formel angeben. Wenn wir den Blendenradius

¹⁰ Es wird vorausgesetzt, daß die Blende die gleiche Apertur erzeugt wie der Kondensor.

an der Stelle $\chi = \chi_B$ mit r_B bezeichnen, so folgt aus Gl. (30), indem man die Indizes 1 durch 2 und Q durch B ersetzt,

$$r_B = a_2 \frac{\sin \omega_2 (\chi_0 - \chi_B)}{\omega_2 \sin \chi_0 \sin \chi_B} \operatorname{tg} \alpha. \quad (68)$$

Für hohe Vergrößerungen ergibt sich mit $\chi_0 = \pi/\omega_2$

$$r_B = a_2 \frac{\sin \omega_2 \chi_B}{\omega_2 \sin \frac{\pi}{\omega_2} \sin \chi_B} \operatorname{tg} \alpha. \quad (69)$$

Für die von Marton und Hutter angegebene größte Blende ist χ_B bei hohen Vergrößerungen sehr klein. In diesem Fall wird nach Gl. (69):

$$r_B = a_2 \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\omega_2}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (70)$$

Gleichzeitig ist $\operatorname{tg} \beta^*$ nach Gl. (64) und (65) sehr groß, so daß eine entsprechende Wahl von $\operatorname{tg} \beta$ erforderlich wird, um eine zu starke Divergenz der Achsen des Blenden- und Beleuchtungskegels zu vermeiden.

Die von Ellis angegebene Blende zeichnet sich dadurch aus, daß sie alle Strahlen abschirmt, die im Objekt einen größeren Neigungswinkel als α besitzen. Der Blendenort ergibt sich daher aus Gl. (9), indem man $z_2 = z_B$ und $z_1 = z_0$ setzt. Mit den beiden Lösungen der Gl. (19) findet man

$$\operatorname{tg} \omega_2 \chi_B = \frac{\sin \omega_2 \chi_0 \cos \chi_0 - \omega_2 \cos \omega_2 \chi_0 \sin \chi_0}{\cos \omega_2 \chi_0 \cos \chi_0 + \omega_2 \sin \omega_2 \chi_0 \sin \chi_0} \quad (71)$$

oder

$$\operatorname{tg} \omega_2 \chi_B = \frac{\operatorname{tg} \omega_2 \chi_0 - \omega_2 \operatorname{tg} \chi_0}{1 + \omega_2 \operatorname{tg} \omega_2 \chi_0 \operatorname{tg} \chi_0}. \quad (72)$$

Daraus folgt für hohe Vergrößerung mit $\chi_0 = \pi/\omega_2$

$$\operatorname{tg} \omega_2 \chi_B = -\omega_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{\omega_2}. \quad (73)$$

Zu dieser Beziehung gelangt man natürlich auch, wenn man $\operatorname{tg} \beta^*$ und damit $\Phi^*(\chi_B)$ in Gl. (65) Null setzt. Wenn $1 < \omega_2 < 2$, so liegt χ_B zwischen 0 und $\pi/4$.

Eine Blende, die genau alle aus dem engsten Bündelquerschnitt kommenden und im Objekt nicht gestreuten Strahlen einschließt, muß sich in der Ebene eines Bildes des engsten Bündelquerschnittes befinden. Es ist daher $\chi_B = \chi_P$ zu setzen. Der Hilfswinkel des zweiten Bildes des engsten Bündelquerschnittes, welches bei nicht zu geringer Brechkraft des Kondensors entsteht, liegt zwischen 0 und $\pi - \pi/\omega_2$.

Wir nennen die drei soeben besprochenen Blenden unter Hinweis auf ihre kennzeichnenden Eigenschaften „größte Blende“, „Blende gleicher Apertur“ und „Kontrastblende“. Ein Blick auf Gl. (69) und (70) zeigt, daß sich der Radius einer beliebigen Blende von dem Radius der größten Blende bei gleicher Apertur nur um den Faktor $\sin \omega_2 \chi_B / \omega_2 \sin \chi_B$ unterscheidet. Wenn wir von der Entstehung eines ersten Bildes des engsten Bündelquerschnittes dicht hinter dem Objekt bei sehr geringer Brechkraft des Kondensors absehen, so ist dieser Faktor in dem gemeinsamen Winkelbereich der drei Blenden nicht stark von 1 verschieden. Die geringen Unterschiede von r_B dürften sich nicht wesentlich auf die Herstellungsschwierigkeit der Blenden auswirken. Von größerer Bedeutung erscheint die Neigung der Achsen der Blendenkegel sowie der Winkel, den sie mit der Achse des Beleuchtungskegels einschließen. Es

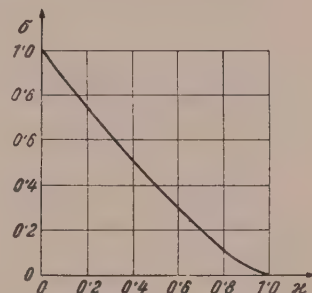


Abb. 8. Der Quotient $F_G/F = \sigma$ als Funktion von χ . F_G bedeutet die den Schnittkreisen des Beleuchtungskegels und Blendenkegels mit der Ebene $z = z_0 + a_2$ gemeinsame Fläche, F die Fläche jedes Kreises. Die Mittelpunkte der Kreise sind um den Bruchteil χ ihres Durchmessers voneinander entfernt.

ist möglich, die Blende gleicher Apertur und die Kontrastblende zu vereinigen. Zu diesem Zweck muß die Brechkraft des Kondensors so eingestellt werden, daß der aus Gl. (57) und (58) zu bestimmende Hilfswinkel χ_P mit dem Winkel χ_B der Gl. (73) zusammenfällt.

(Eingegangen am 10. Mai 1949.)

Ein Umkehrungssatz in nichtlinearen Wechselstromschaltungen.

Von G. Kraus, Wien.

Mit 17 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Für eine bestimmte Klasse von passiven nichtlinearen Systemen, auf die die meisten Schaltungen der Praxis zurückgeführt werden können, gilt ein Umkehrungssatz, mit dessen Hilfe einfache Ersatzschaltbilder für die Übertragung und Frequenzumsetzung amplitudenmodulierter Schwingungen abgeleitet werden können.

Summary. For a certain group of passive, non-linear systems to which most of the usual connecting systems can be reduced a reciprocity theorem is valid, by force of which simple circuit diagrams for transmission, modulation, demodulation and conversion of amplitude-modulated oscillations can be derived.

Résumé. La plupart des systèmes usuels de connexions peuvent être ramenés à une classe de systèmes passifs et non-linéaires; pour ces systèmes il existe un théorème de réciprocité permettant la réalisation de circuits simples pour la transmission et la conversion des oscillations modulées en amplitude.

Einleitung.

Zur elektrischen Nachrichtenübertragung nach dem Amplitudenmodulationsverfahren sind Schaltungen erforderlich, welche notwendig nichtlineare Elemente enthalten. Jede Frequenzumsetzung, wie Modulation, Demodulation, Mischung usw., kann nur durch nichtlineare Systeme zustande kommen, das heißt durch solche, in denen das Superpositionsgesetz nicht gilt.

Während in linearen Schaltungen die Veränderungen der Nachricht bei der Übertragung, die linearen Verzerrungen, mit den üblichen Methoden der Wechselstromtechnik ermittelt werden können, sind bei nichtlinearen Schaltungen, abgesehen von einigen qualitativen Aussagen, keine geschlossenen Rechenverfahren bekannt, welche allgemein gleichzeitig die linearen und nichtlinearen Verzerrungen exakt zu berechnen gestatten. Bei schwach ausgeprägter Nichtlinearität kann man sich allenfalls mit Näherungsrechnungen begnügen; die Untersuchung stark nichtlinearer Schaltungen — und um solche handelt es sich bei der Frequenzumsetzung — muß sich auf einige typische Fälle, also auf gewisse Klassen von Schaltungen beschränken.

Bei der amplitudenmodulierten Schwingung wird das zu übertragende Signal durch die Schwankung der Hochfrequenzamplitude repräsentiert, durch die Modulation (im engeren Sinne), welche hier dieselbe Rolle spielt wie das niederfrequente Signal selbst bei der direkten Übertragung. Genau so wie ein niederfrequentes sinusförmiges Signal durch einen Vektor dargestellt wird, kann auch eine sinusförmige Schwankung des Effektivwertes der Hochfrequenz durch den sogenannten Modulationsvektor versinnbildlicht werden, ja man kann sogar den Niederfrequenzvektor als Modulationsvektor der Trägerfrequenz Null auffassen. In diesem Sinne sind die Modulationsvektoren die eigentlichen Träger der Nachricht. An den Orten der Frequenzumsetzung findet ein Wechsel der Trägerfrequenz statt, dessen Folgen für die Modulation nur in sehr spezialisierten Sonderfällen exakt untersucht worden ist.

Fast alle Veröffentlichungen über Schaltungen zur Frequenzumsetzung beschäftigen sich nur mit der Ermittlung des Arbeitspunktes, das heißt der Betriebsdaten im unmodulierten Zustand und dessen Veränderung bei extrem langsamen Amplitudenänderungen, oder mit der Übertragung der Modulation in mehr oder weniger idealisierten Schaltungen ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Amplitudenschwankungen der verschiedenen Trägerfrequenzen. Ansätze zur Erfassung dieser Wechselwirkung finden sich bei K. Wilhelm¹ und H. A. Wheeler². H. Roder³ leitet nur für einen Sonderfall, nämlich Zweipoldemodulation mit geknickter Gerader als Zweipolkennlinie, ein Ersatzschaltbild für die Übertragung der Modulation bei kleinen Modulationsgraden ab. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, für eine Klasse von Schaltungen, der sich die meisten Schaltungen der Praxis einordnen lassen, die allgemeinen Gesetze dieser Wechselwirkung aufzustellen und mit ihrer Hilfe Regeln für das Entwerfen von Ersatzschaltungen für die Übertragung der Modulation abzuleiten. Bei Beschränkung auf genügend kleine Modulationsgrade können die Ersatzschaltungen linear angenommen werden, so daß dann trotz stark ausgeprägter Nichtlinearität der tatsächlichen Schaltung der Übertragungsfaktor für den Modulationsvektor und damit die gesamten linearen Verzerrungen des Signals bei der Übertragung mit den üblichen Methoden der Wechselstromtechnik mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden können.

Die Klasse der hier untersuchten Schaltungen ist durch zwei Eigenschaften charakterisiert. Einerseits sollen alle nichtlinearen Schaltelemente frequenzunabhängig sein, oder — genauer ausgedrückt — ihre Spannungen und Ströme sollen durch zeit- und frequenzunabhängige Gesetze eindeutig miteinander verknüpft und die durch diese beschriebenen Kennlinienfelder stetig und stetig differenzierbar sein. Andererseits sollen die Schaltungen alle Bedingungen erfüllen, damit die durch die Modulation entstehenden Seitenbänder symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenzen übertragen werden. Eine genauere Definition der zweiten Eigenschaft folgt später. Den meisten Schaltungen der Praxis, deren nichtlineare Schaltelemente im allgemeinen Elektronenröhren, Trocken- oder Kristallgleichrichter sind, können beide Eigenschaften zugeschrieben werden, wenn man von der Übertragung relativ extrem hoher Frequenzen absieht.

Für passive Schaltungen, welche der genannten Klasse angehören, kann ein Umkehrungssatz abgeleitet werden, der für den Modulationsvektor dieselbe Bedeutung hat wie der Kirchhoffsche Umkehrungssatz in linearen Schaltungen für die gewöhnlichen Spannungs- und Stromvektoren. Dieser Umkehrungssatz bildet die Grundlage, daß für passive nichtlineare Schaltungen bei kleinem Modulationsgrad die üblichen passiven linearen Ersatzschaltungen für die Übertragung des Modulationsvektors gezeichnet werden können, die im Hinblick auf die linearen Verzerrungen des Signals als äquivalente Schaltungen anzusehen sind. Eine Verallgemeinerung auf gesteuerte nichtlineare Systeme ist dann in derselben Weise möglich wie in der Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, so daß die dort gewonnenen Erkenntnisse sinngemäß übertragen werden können.

In einer späteren Arbeit werden die Ersatzschaltungen der wichtigsten Schaltungen der Praxis entwickelt und diskutiert werden.

¹ K. Wilhelm: Die Röhre im Rundfunkempfänger. 4. Abhandlung: Diodengleichrichtung. Telefunkenröhre 8, 196 (1936).

² H. A. Wheeler: Design Formulas für Diode Detectors. Proc. I. R. E. 26, 754 (1938).

³ H. Roder: Über die Wechselwirkung zwischen Diode und hochfrequenter Spannungsquelle bei der Gleichrichtung modulierter Hochfrequenz. Telefunkenröhre 26, 65 (1942).

1. Der Kirchhoffsche Umkehrungssatz.

Das Verhalten eines linearen elektrischen Vierpoles, der keine Urspannungen oder Urströme enthält, wird bei sinusförmigen Signalen einer bestimmten Frequenz durch zwei lineare homogene Gleichungen zwischen den Strömen und Spannungen am Eingangs- und Ausgangsklemmenpaar beschrieben (Abb. 1). Dieses Gleichungspaar kann in verschiedener Form aufgeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{U}_1 u_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_2, \\ \mathfrak{I}_1 &= \mathfrak{C} u_2 + \mathfrak{A} \mathfrak{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{W}_{11} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{W}_{12} \mathfrak{I}_2, \\ u_2 &= \mathfrak{W}_{21} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{W}_{22} \mathfrak{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \mathfrak{Y}_{11} u_1 + \mathfrak{Y}_{12} u_2, \\ \mathfrak{I}_2 &= \mathfrak{Y}_{21} u_1 + \mathfrak{Y}_{22} u_2. \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

Es ist üblich, dem Gleichungssystem (1a) die Zählpfeile der Abb. 1a zugrunde zu legen. In den Gl. (1b) und (1c) sowie in allen folgenden Untersuchungen soll nur das Zählpfeilsystem von Abb. 1b verwendet werden.

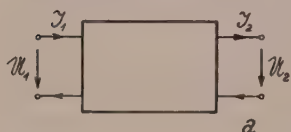


Abb. 1.

Werden diese Gleichungen in Matrizenform angeschrieben⁴, so bezeichnet man die Koeffizientensysteme als Ketten- (1a), Widerstands- (1b),

bzw. Leitwertsmatrix (1c); die den Vierpol charakterisierenden vier Matrizenelemente sind Funktionen der Frequenz.

Besteht ein linearer Vierpol nur aus „toten“ Schaltelementen, das heißt solchen, die keine Energiequellen enthalten, so wird er passiv genannt und es genügen, wie G. Kirchhoff⁵ gezeigt hat, statt vier nur drei Größen zur eindeutigen Kennzeichnung des Vierpoles. Diese Tatsache drückt der Kirchhoffsche Umkehrungssatz durch eine Beziehung zwischen den jeweiligen vier Matrizenelementen in den Gl. (1) aus:

$$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1, \quad (2a)$$

$$\mathfrak{W}_{12} = \mathfrak{W}_{21}, \quad (2b)$$

$$\mathfrak{Y}_{12} = \mathfrak{Y}_{21}. \quad (2c)$$

Als Zusammenhang zwischen den Spannungen und Strömen angeschrieben, bedeuten diese Gleichungen:

$$\left(\frac{-\mathfrak{I}_2}{u_1} \right)_{u_2=0} = \left(\frac{-\mathfrak{I}_1}{u_2} \right)_{u_1=0}, \quad (3a)$$

$$\left(\frac{u_2}{\mathfrak{I}_1} \right)_{\mathfrak{I}_2=0} = \left(\frac{u_1}{\mathfrak{I}_2} \right)_{\mathfrak{I}_1=0}, \quad (3b)$$

$$\left(\frac{-\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1} \right)_{u_2=0} = \left(\frac{u_1}{u_2} \right)_{\mathfrak{I}_1=0}, \quad (3c)$$

$$\left(\frac{u_2}{u_1} \right)_{\mathfrak{I}_2=0} = \left(\frac{-\mathfrak{I}_1}{\mathfrak{I}_2} \right)_{u_1=0}. \quad (3d)$$

Wenn irgendeine der Gl. (2) oder (3) erfüllt ist, so gelten alle anderen auch, das heißt der Vierpol genügt dem Kirchhoffschen Umkehrungssatz.

⁴ R. Feldtkeller: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 2. Aufl. Leipzig: S. Hirzel, 1942.

⁵ G. Kirchhoff: Ann. Physik **72**, 497 (1847).

Die Gl. (3) lassen sich noch in folgender Form in einer einzigen Gleichung zusammenfassen. Bezeichnet man mit x_1 und y_1 die Eingangsgrößen, gleichgültig, welche der beiden die Spannung oder der Strom ist, wobei nur das Produkt beider $x_1 \cdot y_1$ die Leistung am Eingangsklemmenpaar sein muß, und mit $x_2 \cdot y_2$ die Leistung am Ausgangsklemmenpaar, auch gleichgültig, welche der beiden Größen die Spannung und welche der Strom ist, so besagt der Umkehrungssatz, daß für sinusförmige Signale ($\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Vektoren) die Gleichungen gelten:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{x}_1 \end{pmatrix} / \mathfrak{y}_2 = 0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2 \end{pmatrix} / \mathfrak{x}_1 = 0. \quad (4)$$

Je nachdem, in welcher Weise für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Spannungen oder Ströme eingesetzt werden, erhält man eine der Gl. (3). Die Vorzeichen sind hier so zu wählen, daß die einzelnen Größen auf der linken Seite der Gl. (4) positiv im Sinne einer von links nach rechts im Vierpolschema übertragenen Leistung einzusetzen sind, während die Größen auf der rechten Seite der Gl. (4) im Sinne einer von rechts nach links übertragenen Leistung als positiv anzusehen sind.

In dieser Form gilt der Umkehrungssatz auch für alle elektroakustischen Wandler⁶ und für alle passiven akustischen Systeme, sofern sie durch elektrische Ersatzschaltbilder dargestellt werden können⁷, wobei dann für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Vektoren von Kraft und Geschwindigkeit einzusetzen sind. Wichtig ist nur, daß $x_1 \cdot y_1$ und $x_2 \cdot y_2$ physikalische Leistungen sind.

Daß ein Umkehrungssatz nicht nur in elektrischen Schaltungen aus diskreten Schaltelementen, sondern auch für das elektromagnetische Feld gilt, kann unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet werden⁸.

Die Tatsache, daß zur Kennzeichnung von Vierpolen, in denen der Umkehrungssatz gilt, drei Matrizenelemente ausreichen, gibt die Möglichkeit, jeden solchen Vierpol durch ein Ersatzschaltbild zu charakterisieren, das nur drei Bestimmungstücke enthält. Abb. 2 zeigt einige dieser Möglichkeiten. Solche Ersatzschaltungen müssen nicht wirklich realisierbar sein, z. B. können sie negative Wirkwiderstände oder ideale Übersetzer mit komplexem Übersetzungsverhältnis enthalten, man wird jedoch trachten, Ersatzschaltungen zu verwenden, die nur realisierbare Schaltelemente enthalten und sich wenn möglich nicht nur für eine, sondern für alle Frequenzen gleich verhalten wie der zu ersetzende Vierpol (äquivalente Schaltungen), auch wenn die Ersatzschaltung dadurch komplizierter wird. Analog lassen sich auch für passive 2 n -Pole Ersatzschaltungen entwerfen.

Obwohl der Umkehrungssatz in den meisten Fällen nur auf Schaltungen aus „toten“ Schaltelementen Anwendung findet, ist er durchaus nicht nur auf diese beschränkt. Da der Umkehrungssatz aus der Symmetrie der Gleichungen, welche die Kirchhoffschen Gesetze für das Netzwerk ausdrücken, allein ableitbar ist und diese Symmetrie in keiner Weise gestört wird, wenn man einzelnen Schaltelementen statt eines positiven einen negativen Widerstand zuschreibt, so gilt der Umkehrungssatz auch bei Schaltungen, die Energiequellen, z. B. in Form von negativen Widerständen, enthalten, sofern nur der durch jedes Schaltelement fließende Strom nur von der an ihm herrschenden Spannung und sonst von keiner anderen abhängt, oder

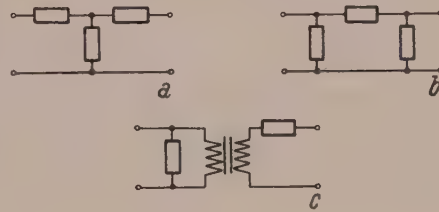


Abb. 2.

⁶ H. Hecht: Die elektroakustischen Wandler. Leipzig: J. A. Barth. 1941.

⁷ H. Hecht: Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. Leipzig: J. A. Barth. 1939.

⁸ G. Goubau: Reziprozität der Wellenausbreitung durch magnetisch doppelbrechende Medien. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 60, H. 6, 155 (1942).

eine solche Abhängigkeit dem Umkehrungssatz genügt; es muß für jeden Teil der Schaltung für sich der Umkehrungssatz gelten. Das hinreichende Kriterium für die Gültigkeit des Umkehrungssatzes ist somit nicht, wie oft behauptet wird, die Freiheit von Energiequellen, sondern allgemeiner die Voraussetzung, daß das System keine gesteuerten Schaltelemente enthält.

Die Ersatzschaltung im weiteren Sinne für lineare Vierpole, in denen der Umkehrungssatz nicht gilt, muß mindestens vier Bestimmungsstücke enthalten, von denen eines eine gesteuerte Strom- oder Spannungsquelle sein muß.

2. Triviale Form des Umkehrungssatzes in nichtlinearen Wechselstromschaltungen.

Wenn in einem elektrischen Netzwerk frequenzunabhängige nichtlineare Schaltelemente enthalten sind, deren Strom-Spannungscharakteristiken stetige und stetig differenzierbare Funktionen sind, so kann bei genügend kleiner Aussteuerung jedes derartige Netzwerk mit beliebiger Genauigkeit als linear angesehen werden. Im Grenzfall sind die nichtlinearen Charakteristiken durch ihre Tangenten im Arbeitspunkt zu ersetzen. Je näher man diesem Grenzfall ist, mit desto größerer Genauigkeit sind alle quantitativen Gesetze über lineare Netzwerke anwendbar.

Insbesondere gilt auch in solchen Systemen, die überdies keine gesteuerten Schaltelemente enthalten, mit beliebiger Genauigkeit bei genügend kleiner Aussteuerung der Kirchhoffsche Umkehrungssatz, so daß quasilineare Ersatzschaltbilder gezeichnet werden können. Ein charakteristischer Vertreter von derartigen nichtlinearen Schaltungen ist ein elektrisches Netzwerk, welches außer passiven linearen Schaltelementen auch nichtlineare Zweipole enthält.

In dem besonderen Fall, daß das nichtlineare Netzwerk insgesamt nur aus frequenzunabhängigen und ungesteuerten Einzelteilen besteht, kann der Umkehrungssatz in der Form angeschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_{y_2 = \text{konst.}} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial y_2} \right)_{x_1 = \text{konst.}} \quad (5)$$

Die Bedeutung der Größen x_1 , x_2 , y_1 , y_2 und die Vorzeichenregeln sind die gleichen, wie sie oben bei Besprechung der Gl. (4) festgelegt wurden.

In dieser trivialen Form haben der Umkehrungssatz und die Möglichkeit des Zeichnens von Ersatzschaltbildern keine große theoretische Bedeutung, denn gerade die wesentlichen Unterschiede der nichtlinearen Netzwerke gegenüber den linearen werden dabei nicht berücksichtigt. Diese Unterschiede sind es aber, welche die nichtlinearen Schaltelemente zu teils unentbehrlichen, teils störenden Bestandteilen der elektrischen Übertragungsanlagen machen und ihre besondere Untersuchung erfordern.

Eine Erweiterung der quasilinearen Methode haben R. Feldtkeller und W. Wolman in der Theorie der fastlinearen Netzwerke gegeben⁹, in der die Abweichung von der Linearität in erster Annäherung berücksichtigt wird. Allerdings ist die Anwendbarkeit auch dieser Theorie auf relativ kleine Aussteuerungen beschränkt, während in vielen Problemen der Nachrichtentechnik eine relativ große Aussteuerung von Nichtlinearitäten wesentliches Merkmal ist.

Es wird nun im folgenden gezeigt werden, daß auch bei großen Aussteuerungen Ersatzschaltbilder gezeichnet werden können, und zwar gerade für solche elektrische Systeme, die bei der Übertragung und der Frequenzumsetzung von amplitudenmodulierten Schwingungen am häufigsten angewendet werden. Die Aussteuerung durch die Trägeramplitude kann beliebig groß sein, nur der Modulationsgrad muß genügend klein angenommen werden, damit quasilineare Ersatzschaltbilder gezeichnet werden können.

⁹ R. Feldtkeller und W. Wolman: Fastlineare Netzwerke. *Telegr.-, Fernspr.- u. Funktechn.* 20, H. 6, 167 (1931); H. 8, 242.

3. Der nichtlineare frequenzunabhängige Zweipol.

a) Aussteuerung durch eine Wechselspannung.

Ein nichtlinearer frequenzunabhängiger Zweipol ist durch die Kennlinie eindeutig gekennzeichnet, die den Zusammenhang zwischen Klemmenstrom i und Klemmenspannung u angibt.

$$i = f(u).$$

Diese Kennlinie sei stetig und stetig differenzierbar vorausgesetzt. Im Schaltschema soll ein solcher Zweipol durch das Symbol des Trockengleichrichters versinnbildlicht werden (Abb. 3a).

Werden dem nichtlinearen Zweipol eine Gleichspannung und eine Wechselspannung aufgedrückt (Abb. 3b)

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos \omega t,$$

so fließt ein Strom (Abb. 4), der als periodische Funktion der Zeit durch eine Fourier-

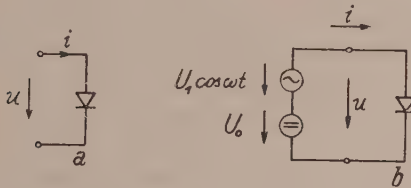


Abb. 3.

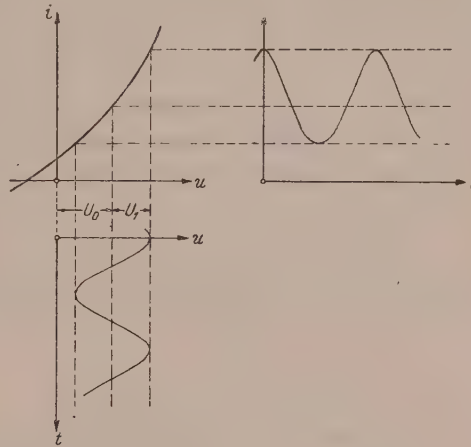


Abb. 4.

Reihe darstellbar ist, die hier als gerade Funktion der Zeit nur Cosinusklieder enthält,

$$i = f(U_0 + U_1 \cos \omega t) = J_0(U_0, U_1) + J_1(U_0, U_1) \cdot \cos \omega t + J_2(U_0, U_1) \cdot \cos 2\omega t + \dots \quad (6)$$

Ersetzt man ωt durch $\omega t + \varphi$, so erhält man für eine aufgedrückte Spannung $u = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ mit beliebiger Phase der Wechselspannung allgemein den Strom

$$i = J_0(U_0, U_1) + J_1(U_0, U_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + J_2(U_0, U_1) \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi) + \dots \quad (6a)$$

Die Amplituden der harmonischen Teilschwingungen sind nur Funktionen der aufgedrückten Spannungsgrößen und können nach den Regeln der Fourier-Analyse ermittelt werden:

$$\left. \begin{aligned} J_0(U_0, U_1) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_1 \cdot \cos x) dx, \\ J_m(U_0, U_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_1 \cos x) \cdot \cos m x dx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Der Zusammenhang von Gleichspannung und Gleichstrom einerseits sowie Wechselspannung und Grundwelle des Wechselstromes andererseits kann in Form eines nichtlinearen frequenzunabhängigen Vierpols veranschaulicht werden (Abb. 5). Wie es sich gleich zeigen wird, empfiehlt es sich, bei den Wechselgrößen statt der Scheitelwerte die Effektivwerte zu verwenden.

Um die Eigenschaften dieses Vierpoles zu untersuchen, kann man die Gl. (7) partiell differenzieren und erhält unter anderem:

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial U_1}\right)_{U_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(U_0 + U_1 \cdot \cos x) \cdot \cos x \, dx,$$

$$\left(\frac{\partial J_1}{\partial U_0}\right)_{U_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(U_0 + U_1 \cdot \cos x) \cdot \cos x \, dx.$$

Der tiefgestellte Index beim partiellen Differentiationszeichen bedeutet die konstant gehaltene Größe. Man erkennt aus diesen beiden Gleichungen den Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial U_1}\right)_{U_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_1}{\partial U_0}\right)_{U_1}.$$

Führt man bei Wechselstrom und Wechselspannung statt der Scheitelwerte Effektivwerte ein, so erhält man

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial U_{1\text{eff}}}\right)_{U_0} = \left(\frac{\partial J_{1\text{eff}}}{\partial U_0}\right)_{U_{1\text{eff}}} \quad (8)$$

Diese Gleichung ist vollkommen analog den Gl. (3a) bzw. (5), durch die bisher der Umkehrungssatz ausgedrückt war. Der Vierpol von Abb. 5 genügt dem trivialen

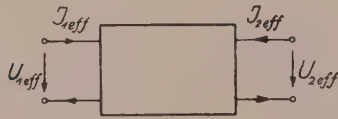


Abb. 5.

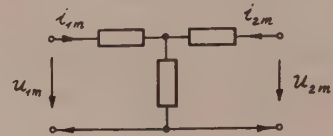


Abb. 6.

Umkehrungssatz (5), er kann daher passiv genannt werden. Die Gl. (8) besagt nichts anderes, als daß für genügend kleine Änderungen von Spannungen und Strömen im nichtlinearen Vierpol der Abb. 5 der Kirchhoffsche Umkehrungssatz gilt und daß somit der Zusammenhang zwischen solchen kleinen Änderungen durch ein Vierpolersatzschaltbild nach Abb. 2 ausgedrückt werden kann. Bezeichnet man diese kleinen Änderungen von Gleichspannung, Gleichstrom, Effektivwert der Wechselspannung und Effektivwert des Grundwellenstromes mit kleinen Buchstaben mit dem zusätzlichen Index „m“, so gilt für sie mit beliebiger Genauigkeit das lineare Ersatzschaltbild z. B. der Abb. 6, wenn diese Änderungen nur klein genug sind. Die drei frequenzunabhängigen Schaltelemente des Ersatzvierpols lassen sich, wie in einer späteren Arbeit gezeigt wird, leicht aus den partiellen Differentialquotienten der Gl. (7) berechnen.

Diese Änderungen von Gleichstrom und Gleichspannung (Niederfrequenz) bzw. Wechselstrom und Wechselspannung (Modulation der Hochfrequenz) sind es gerade, die bei der Übertragung und Frequenzumsetzung amplitudenmodulierter Schwingungen Träger der elektrischen Nachricht sind. Solange diese Änderungen klein sind, ist es also mit hinreichender Genauigkeit möglich, für die Gleichstrom- und Wechselstromumsetzung der Modulation den nichtlinearen Zweipol durch einen linearen Vierpol zu ersetzen und im Zusammenhang mit der übrigen Schaltung die linearen Verzerrungen der Modulation bei der Übertragung nach bekannten Methoden zu ermitteln. Bei dieser Behandlungsweise werden die nichtlinearen Verzerrungen der Modulation vernachlässigt. Eine eventuelle Berücksichtigung können diese unter Zugrundelegung des nichtlinearen Vierpols nach Abb. 5 erfahren.

b) Aussteuerung durch zwei Wechselspannungen mit irrationalem Frequenzverhältnis.

Wird der nichtlineare Zweipol mit einer Gleichspannung U_0^* und einer Wechselspannung $U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ beaufschlagt

$$u = U_0^* + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

so gilt entsprechend (6a) die identische Gleichung

$$i = f[U_0^* + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)] = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(U_0^*, U_1) \cdot \cos(m \omega_1 t + m \varphi_1), \quad (6b)$$

und zwar gilt diese Identität für jedes U_0^* , also auch für ein zeitlich veränderliches, das heißt auch wenn

$$U_0^* = U_0 + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (9)$$

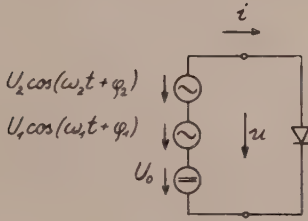


Abb. 7.

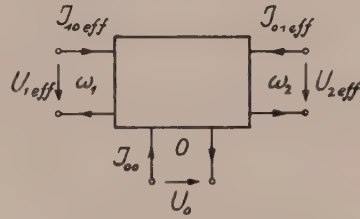


Abb. 8.

gesetzt wird. Dies entspricht der Aussteuerung des nichtlinearen Zweipoles durch eine Gleichspannung und zwei Wechselspannungen (Abb. 7)

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Mit der Substitution (9) werden die Größen $J_m(U_0, U_1)$ selbst wieder periodische Funktionen der Zeit und sind also als Fourier-Reihen darstellbar.

$$J_m[U_0 + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2), U_1] = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(U_0, U_1, U_2) \cdot \cos(n \omega_2 t + n \varphi_2). \quad (10)$$

Der durch den nichtlinearen Zweipol fließende Strom ist somit als Doppelsumme darstellbar.

$$i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(U_0, U_1, U_2) \cdot \cos(m \omega_1 t + m \varphi_1) \cdot \cos(n \omega_2 t + n \varphi_2). \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Formel

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

erhält man weiter

$$i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_{m,n}(U_0, U_1, U_2) \cdot \cos[(m \omega_1 \pm n \omega_2) t + m \varphi_1 \pm n \varphi_2]. \quad (12)$$

Der Strom enthält demnach im allgemeinen alle möglichen Kombinationsschwingungen mit den Kreisfrequenzen $|m \omega_1 \pm n \omega_2|$. Es sei angenommen, daß das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 eine irrationale Zahl ist, daher fällt die Frequenz keiner Kombinationsschwingung mit der einer anderen zusammen.

Die Amplituden der Kombinationsschwingungen ergeben sich nach den Regeln der Fourier-Analyse entsprechend den Fourier-Reihen der Gl. (6b) und (10)

$$\left. \begin{aligned} J_{00}(U_0, U_1, U_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_1 \cdot \cos x + U_2 \cdot \cos y) dx dy, \\ J_{mn}(U_0, U_1, U_2) &= \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_1 \cos x + U_2 \cos y) \cdot \cos mx \cdot \cos ny dx dy. \end{aligned} \right\} (13)$$

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Strömen der Kreisfrequenzen 0, ω_1 und ω_2 kann durch einen frequenzunabhängigen nichtlinearen Sechspol nach Abb. 8 veranschaulicht werden. Auch hier werden vorteilhaft Effektivwerte zugrunde gelegt. Es fließen nur Wirkströme. Zum Beweis, daß auch in diesem Sechspol für kleine Änderungen der Umkehrungssatz gilt, bilde man folgende partielle Differentialquotienten der Gl. (13), deren paarweise Gleichheit sich unmittelbar ergibt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J_{00}}{\partial U_1} \right)_{U_0, U_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{10}}{\partial U_0} \right)_{U_1, U_2}; & \left(\frac{\partial J_{00}}{\partial U_2} \right)_{U_0, U_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{01}}{\partial U_0} \right)_{U_1, U_2} \\ \left(\frac{\partial J_{10}}{\partial U_2} \right)_{U_0, U_1} &= \left(\frac{\partial J_{01}}{\partial U_1} \right)_{U_0, U_2}. \end{aligned}$$

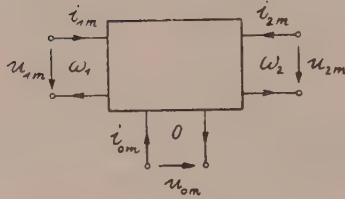


Abb. 9.

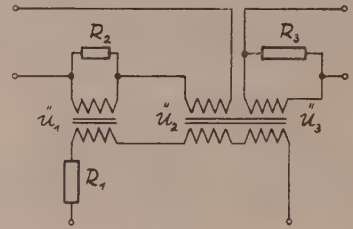


Abb. 10.

Führt man für die Effektivwerte der Teilströme mit den Kreisfrequenzen 0, ω_1 und ω_2 die Bezeichnung ein

$$J_{00} = J_0; \quad \frac{J_{10}}{\sqrt{2}} = J_{1\text{eff}}; \quad \frac{J_{01}}{\sqrt{2}} = J_{2\text{eff}},$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial J_0}{\partial U_{1\text{eff}}} \right)_{U_0, U_{2\text{eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{1\text{eff}}}{\partial U_0} \right)_{U_{1\text{eff}}, U_{2\text{eff}}} \\ \left(\frac{\partial J_0}{\partial U_{2\text{eff}}} \right)_{U_0, U_{1\text{eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{2\text{eff}}}{\partial U_0} \right)_{U_{1\text{eff}}, U_{2\text{eff}}} \\ \left(\frac{\partial J_{1\text{eff}}}{\partial U_{2\text{eff}}} \right)_{U_0, U_{1\text{eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{2\text{eff}}}{\partial U_{1\text{eff}}} \right)_{U_0, U_{2\text{eff}}} \end{aligned} \right\} (14)$$

Diese Gleichungen sind wieder der Ausdruck für den Umkehrungssatz für kleine Änderungen von Spannungen und Strömen. Kennzeichnet man wieder die Änderungen der Effektivwerte von Strömen und Spannungen mit kleinen Buchstaben mit dem Index „m“, so ist ihr Zusammenhang mit beliebiger Genauigkeit durch einen frequenzunabhängigen linearen passiven Sechspol wiedergegeben, wenn sie nur genügend klein sind (Abb. 9). Ein solcher passiver linearer Sechspol ist bekanntlich durch sechs Bestimmungsstücke eindeutig definiert, er kann durch ein Ersatzschaltbild, bestehend aus sechs ungesteuerten Schaltelementen, eindeutig charakterisiert werden. Die Größe der einzelnen Schaltelemente ergibt sich aus den partiellen Differentialquotienten der Gl. (13).

Ein Beispiel eines solchen Ersatzvierpoles zeigt die Abb. 10. Zunächst werden die idealen Übertrager als störend empfunden, da sie im Ersatzschaltbild auch Gleichstrom übertragen müßten, immerhin ist gerade diese Art von Ersatzschaltbildern verhältnismäßig übersichtlich, da sie zum Unterschied von Ersatzschaltungen ohne Übertrager nur positive Widerstände enthalten. Außerdem ist die Übertragung der Signalfrequenz Null mit Hilfe von amplitudenmodulierten Schwingungen ohnehin ein so gut wie nie vorkommender Betriebsfall, für die Zwecke der Praxis ist daher das Ersatzschaltbild nach Abb. 10 voll geeignet.

Im übrigen ist folgendes zu beachten: dann und nur dann, wenn die Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 der aufgedrückten Spannungen inkommensurabel sind, wenn also ω_1/ω_2 eine irrationale Zahl ist, entspricht jeder Kombinationsschwingung umkehrbar eindeutig eine bestimmte Frequenz, so daß jede tatsächliche Teilschwingung des Stromes einer und nur einer Kombinationsschwingung entspricht. Der Strom ist in diesem Fall eine zweifach periodische Funktion¹⁰ der Zeit.

c) Aussteuerung durch zwei Wechselspannungen mit rationalem Frequenzverhältnis.

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß sich ganz allgemein der Strom eines nichtlinearen frequenzunabhängigen Zweipoles, dem eine Gleichspannung und zwei Wechselspannungen, also eine Spannung vom Typus

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

aufgedrückt werden, als Summe von Kombinationsschwingungen in der Form der Gl. (12) darstellen läßt. Ist das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 eine irrationale Zahl, so fällt keine Kombinationsfrequenz mit einer anderen zusammen, es läßt sich — anders ausgedrückt — kein von Null verschiedenes ganzzahliges m und n angeben, so daß $m\omega_1 - n\omega_2 = 0$; der Strom ist eine zweifach periodische Funktion der Zeit.

Wenn dagegen, wie jetzt vorausgesetzt, das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 eine rationale Zahl ist, dann haben unendlich viele Kombinationsschwingungen der Gl. (12) dieselbe Frequenz und addieren sich daher geometrisch zu einer bestimmten Teilschwingung des Stromes. ω_1 und ω_2 lassen sich als ganzzahlige Vielfache eines größten gemeinsamen Teilers ω_0 ausdrücken

$$\omega_1 = \mu \omega_0; \quad \omega_2 = \nu \omega_0$$

und die Gesamtheit der Kombinationsfrequenzen läßt sich darstellen

$$|m\omega_1 \pm n\omega_2| = k\omega_0.$$

Die Frequenzen der Teilschwingungen des Stromes sind ein ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Grundfrequenz $\frac{\omega_0}{2\pi}$, der Strom ist daher eine einfach periodische Funktion der Zeit und läßt sich als gewöhnliche Fourier-Reihe darstellen:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \psi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{kc} \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} J_{ks} \sin k\omega_0 t. \quad (15)$$

Die Amplituden und Phasen der Teilströme ergeben sich nach bekannten Methoden der Fourier-Analyse

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [U_0 + U_1 \cdot \cos(\mu\omega_0 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\nu\omega_0 t + \varphi_2)] d\omega_0 t. \quad (16a)$$

¹⁰ Die hier zweifach periodisch genannten Funktionen stehen in keinem Zusammenhang mit den sogenannten doppelperiodischen Funktionen der Funktionentheorie.

$$\left. \begin{aligned} J_{kc} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\mu \omega_0 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\nu \omega_0 t + \varphi_2)] \cdot \cos k \omega_0 t \cdot d\omega_0 t, \\ J_{ks} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\mu \omega_0 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\nu \omega_0 t + \varphi_2)] \cdot \sin k \omega_0 t \cdot d\omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

$$J_k = \sqrt{J_{kc}^2 + J_{ks}^2}; \quad \psi_k = -\arctg \frac{J_{ks}}{J_{kc}}. \quad (17)$$

Wie man aus den Gl. (16) und (17) erkennt, ist es im allgemeinen nicht möglich, zwischen den Effektivwerten der Teilschwingungen des Stromes und den der aufgedruckten Spannungen eine den Gl. (14) entsprechende Beziehung als Ausdruck für den Umkehrungssatz aufzustellen. Wohl aber gilt ein solches Gleichungssystem für diejenigen Komponenten der Teilströme, die gleichphasig mit den aufgedruckten Spannungen sind, also mit den Spannungen ein echtes Leistungspaar bilden (vgl. Abschnitt 1).

Wenn man nämlich die Teilströme mit den Kreisfrequenzen $\omega_1 = \mu \omega_0$ und $\omega_2 = \nu \omega_0$ in zwei Komponenten zerlegt

$$\left. \begin{aligned} J_{\mu} \cdot \cos(\mu \omega_0 t + \psi_{\mu}) &= J_{\mu w} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + J_{\mu b} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\ J_{\nu} \cdot \cos(\nu \omega_0 t + \psi_{\nu}) &= J_{\nu w} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + J_{\nu b} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

von denen die eine als Wirkkomponente gleichphasig mit der aufgedruckten Spannung der betreffenden Frequenz ist, während die zweite als Blindkomponente um 90° nacheilt, so gelten für die Berechnung dieser Komponenten die folgenden Formeln der Fourier-Analyse:

$$\left. \begin{aligned} J_{\mu w} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) d\omega_0 t, \\ J_{\nu w} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) d\omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\mu b} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) d\omega_0 t, \\ J_{\nu b} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f[U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) d\omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Führt man die Effektivwerte der Wirkkomponenten in die Formeln ein

$$\frac{J_{\mu w}}{\sqrt{2}} = J_{1w \text{ eff}}; \quad \frac{J_{\nu w}}{\sqrt{2}} = J_{2w \text{ eff}};$$

so erhält man auch hier durch partielle Differentiation der Gl. (16a) und (19a) die Formeln für den Umkehrungssatz:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial J_0}{\partial U_{1 \text{ eff}}} \right)_{U_0, U_{2 \text{ eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{1 w \text{ eff}}}{\partial U_0} \right)_{U_{1 \text{ eff}}, U_{2 \text{ eff}}}, \\ \left(\frac{\partial J_0}{\partial U_{2 \text{ eff}}} \right)_{U_0, U_{1 \text{ eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{2 w \text{ eff}}}{\partial U_0} \right)_{U_{1 \text{ eff}}, U_{2 \text{ eff}}}, \\ \left(\frac{\partial J_{1 w \text{ eff}}}{\partial U_{2 \text{ eff}}} \right)_{U_0, U_{1 \text{ eff}}} &= \left(\frac{\partial J_{2 w \text{ eff}}}{\partial U_{1 \text{ eff}}} \right)_{U_0, U_{2 \text{ eff}}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Für kleine Änderungen der Effektivwerte von Spannungen und Wirkströmen läßt sich auch hier mit beliebiger Genauigkeit ein linearer frequenzunabhängiger Ersatzsechspol angeben (Abb. 9).

Der Umkehrungssatz (20) gilt allgemein für die Wirkkomponenten der Teilströme bei jedem beliebigen rationalen Frequenzverhältnis, also z. B. auch bei Frequenzgleichheit, wenn die beiden aufgedrückten Spannungen gleiche Frequenz, aber verschiedene Phasen haben. Es scheint daher möglich, die Verknüpfung zwischen den Änderungen von Spannung und Strom einer bestimmten Frequenz $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ des nichtlinearen Zweipoles bei beliebiger Phasenlage durch ein lineares Ersatzschaltbild nach Abb. 9 zu erfassen, in dem Spannung und Strom in je zwei Komponenten mit 90° Phasenunterschied zerlegt werden. In Gl. (19a) wäre $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Die Änderungen dieser Komponenten sind durch den Umkehrungssatz (20) miteinander verknüpft und können paarweise verschiedenen Klemmenpaaren einer linearen passiven Ersatzschaltung nach Abb. 9 zugeordnet werden.

Die Bedeutung dieses allgemeinen Zusammenhanges wird jedoch, wie später gezeigt wird, dadurch wesentlich eingeschränkt, daß bei der Zusammenschaltung eines nichtlinearen frequenzunabhängigen Zweipoles mit linearen frequenzabhängigen Schaltelementen im allgemeinen kein alle Teile der Schaltung gleichzeitig umfassendes Ersatzschaltbild angegeben werden kann. Dies hängt damit zusammen, daß bei der Zerlegung von Spannung und Strom in zwei um 90° phasenverschobene Komponenten in den linearen Schaltelementen andere Verknüpfungsgesetze für die Änderungen der Komponenten gelten, als die Gl. (20) für die nichtlinearen Schaltelemente ausdrücken.

Nur in gewissen Fällen, die allerdings in den Übertragungssystemen für amplitudenmodulierte Schwingungen meistens gegeben sind, können die ganze Schaltung umfassende Ersatzschaltbilder angegeben werden. Diese Sonderfälle setzen, wie später begründet wird, voraus, daß die Teilströme mit den aufgedrückten Spannungen gleicher Frequenz prinzipiell, das heißt auch bei Veränderungen der Amplituden und bei beliebiger Zweipolkennlinie in Phase sind, daß also die Blindströme (19b) stets Null und die Teilströme mit den Wirkströmen identisch sind. Dieses prinzipielle Verschwinden der Blindströme setzt wiederum einen bestimmten Zusammenhang zwischen den Phasen der aufgedrückten Spannungen voraus.

Ein einfacher Typus dieser Sonderfälle liegt dann vor, wenn die Phasen der aufgedrückten Spannungen verschwinden, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, das heißt wenn die aufgedruckte Spannung gegeben ist durch

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos \mu \omega_0 t + U_2 \cdot \cos \nu \omega_0 t.$$

Da hier die Spannung eine gerade Funktion der Zeit ist, ist es auch der Strom des nichtlinearen Zweipoles und die Fourier-Reihe des Stromes in Gl. (15) enthält nur Cosinusglieder. Die Blindströme J_{ks} der Gl. (16b) verschwinden.

An dem Nullwerden der Blindströme ändert sich nichts, wenn von diesem Typus ausgehend einerseits die Phasen um ein ganzzahliges Vielfaches von π verändert werden,

da ja die Spannung dann noch immer eine gerade Funktion der Zeit ist, bzw. wenn anderseits der Zeitnullpunkt t_0 irgendwie anders gewählt wird. Schreibt man $\omega_0 t_0 = \varphi_0$, so erhält man den allgemeinsten Fall, wo die Blindströme prinzipiell verschwinden, darstellbar in der Form

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos(\mu \omega_0 t + \mu \varphi_0 + k_1 \pi) + U_2 \cdot \cos(\nu \omega_0 t + \nu \varphi_0 + k_2 \pi). \quad (21)$$

Ist die aufgedrückte Spannung in der Form gegeben:

$$\dot{u} = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

wobei $\omega_1 = \mu \omega_0$ und $\omega_2 = \nu \omega_0$, dann ist das Kriterium, ob hier ein solcher Sonderfall vorliegt, die Möglichkeit, ob sich ganzzahlige k_1 und k_2 finden lassen, so daß

$$\frac{\varphi_1 - k_1 \pi}{\mu} = \frac{\varphi_2 - k_2 \pi}{\nu} = \varphi_0.$$

Diese Gleichung kann noch anders geschrieben werden:

$$\nu \varphi_1 - \mu \varphi_2 = (\nu k_1 - \mu k_2) \pi.$$

Da μ und ν teilerfremd vorausgesetzt werden, läßt sich immer je ein ganzzahliges k_1' und k_2' finden¹¹, so daß $\nu k_1' - \mu k_2' = 1$. Daher ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das prinzipielle Verschwinden der Blindströme, daß obiger Ausdruck irgendein ganzzahliges Vielfaches von π ist:

$$\nu \varphi_1 - \mu \varphi_2 = k \pi. \quad (22)$$

Anschaulich bedeuten diese Kriterien, daß es Zeitpunkte gibt, von denen aus gesehen die aufgedrückte Spannung eine gerade Funktion der Zeit ist. Ist $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ die Periodendauer der Grundschwingung, dann gibt es allgemein solche ausgezeichneten Zeitpunkte entweder im Abstände $T/2$ oder überhaupt nicht.

d) Aussteuerung durch mehrere Wechselspannungen.

Werden einem frequenzunabhängigen, nichtlinearen Zweipol gleichzeitig eine Gleichspannung und mehrere Wechselspannungen aufgedrückt,

$$u = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + U_r \cdot \cos(\omega_r t + \varphi_r),$$

so kann der Strom nach derselben Methode wie früher berechnet werden, indem die Gleichspannung schrittweise wie in Gl. (9) durch die Summe einer Gleichspannung und einer neuen Wechselspannung ersetzt wird. Man erkennt unschwer aus der Wiederholung des Prozesses, der durch die Gl. (9) bis (12) gekennzeichnet ist, daß der Strom allgemein aus allen Kombinationsschwingungen besteht, deren Frequenzen eine ganzzahlige Linearkombination der Frequenzen der aufgedrückten Wechselspannungen sind. Die Kreisfrequenzen der Kombinationsschwingungen lassen sich darstellen durch

$$|m_1 \omega_1 \pm m_2 \omega_2 \pm \dots \pm m_r \omega_r|.$$

Die Berechnung der Amplituden der einzelnen Kombinationsschwingungen erfolgt durch Verallgemeinerung der Gl. (13).

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: entweder gibt es Kombinationsschwingungen, deren Frequenzen genau zusammenfallen, oder es gibt keine solchen. Das ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es ganzzahlige, nicht sämtlich verschwindende positive oder negative $m_{\sigma g}$ gibt, so daß

$$m_{\sigma 1} \omega_1 + m_{\sigma 2} \omega_2 + \dots + m_{\sigma r} \omega_r = 0, \quad (23)$$

oder nicht. Die $m_{\sigma g}$ sollen keinen gemeinsamen Teiler haben.

¹¹ O. Bürklen und F. Ringleb: Mathematische Formelsammlung. Sammlung Götschen. Berlin-Leipzig: de Gruyter & Co. 1927.

Gibt es keine solchen $m_{\sigma q}$, sind also die Frequenzen inkommensurabel, dann entspricht umkehrbar eindeutig jeder Kombinationsschwingung eine Teilschwingung des Stromes. Der Strom ist eine r -fach periodische Funktion der Zeit. Wie man aus der Verallgemeinerung der Gl. (12) erkennt, fließen nur Wirkströme, das heißt die aufgedrückten Spannungen sind mit den Teilströmen derselben Frequenz stets in Phase.

Sind jedoch die Frequenzen der aufgedrückten Spannungen kommensurabel, das heißt so beschaffen, daß es ganzzahlige Koeffizienten $m_{\sigma q}$ gibt, so daß die Gl. (23) erfüllt ist, dann fallen die Frequenzen verschiedener Kombinationsschwingungen zusammen und die Teilschwingungen des Stromes setzen sich aus einer Reihe von Kombinationsschwingungen derselben Frequenz zusammen. Gibt es s verschiedene, voneinander linear unabhängige ganzzahlige Koeffizientensysteme, bei denen die Gl. (23) erfüllt ist, dann ist der Strom des nichtlinearen Zweipoles eine t -fach periodische Funktion der Zeit, wenn $t = r - s$ ist. Es können dann als Fundamentalsystem t verschiedene Grundfrequenzen gewählt werden, aus denen sich die Frequenzen der aufgedrückten Spannungen durch ganzzahlige Linearkombination zusammensetzen lassen. Im allgemeinen sind die aufgedrückten Spannungen mit den Teilströmen derselben Frequenz nicht in Phase. Die Blindströme verschwinden prinzipiell, das heißt unabhängig von den Amplituden und unabhängig von der Zweipolkennlinie dann und nur dann, wenn für die Phasen der aufgedrückten Spannungen die Gleichungen erfüllt sind

$$m_{\sigma 1} \varphi_1 + m_{\sigma 2} \varphi_2 + \dots + m_{\sigma r} \varphi_r = k_{\sigma} \pi, \quad (24)$$

und zwar genau so viele, nämlich s Gleichungen, und mit genau denselben Koeffizienten $m_{\sigma q}$, wie sie für die Frequenzen (23) gelten. k_{σ} sind irgendwelche ganzen Zahlen [vgl. Gl. (22)]. Spannungen, deren Phasen den Bedingungen (24) genügen, sollen „phasenrecht“ genannt werden. Unter diesen Umständen setzen sich die Kombinationsschwingungen gleicher Frequenzen nicht geometrisch, sondern bloß algebraisch zu der Teilschwingung des Stromes zusammen, da sich ihre Phasen nur um ganzzahlige Vielfache von π voneinander unterscheiden können.

Auf alle Fälle gilt, wie sich aus der Amplitudenberechnung der Teilschwingungen ableiten läßt, für die aufgedrückten Spannungen und die Wirkströme gleicher Frequenz stets der Umkehrungssatz. Für die Zusammenschaltung von nichtlinearen frequenzunabhängigen Zweipolen mit linearen Schaltelementen besitzt jedoch, wie später gezeigt wird, der Umkehrungssatz Bedeutung nur dann, wenn prinzipiell keine Blindströme fließen. Läßt sich für die Frequenzen der aufgedrückten Spannungen kein ganzzahliges Koeffizientensystem finden, womit die Gl. (23) befriedigt wird, so fließen von vornherein nur Wirkströme. Bestehen aber zwischen den Frequenzen Beziehungen derart, wie sie die Gl. (23) ausdrückt, so muß gefordert werden, daß gleichzeitig für die Phasen der aufgedrückten Spannungen die Gl. (24) erfüllt sind. Wir wollen allgemein alle aufgedrückten Wechselspannungen, deren Frequenzen inkommensurabel sind, oder deren Phasen bei kommensurablen Frequenzen die Gl. (24) befriedigen, phasenrecht nennen. Bezeichnet man mit $U_{q \text{ eff}}$, $U_{\sigma \text{ eff}}$, $J_{q \text{ eff}}$, $J_{\sigma \text{ eff}}$ die Effektivwerte je zweier aufgedrückter Spannungen bzw. Teilströme, so hat für phasenrechte Spannungen der Umkehrungssatz die Form

$$\frac{\partial J_{q \text{ eff}}}{\partial U_{\sigma \text{ eff}}} = \frac{\partial J_{\sigma \text{ eff}}}{\partial U_{q \text{ eff}}}. \quad (25)$$

Bei der partiellen Differentiation sind die Effektivwerte aller übrigen aufgedrückten Spannungen konstant zu halten.

Bezeichnet man die Änderungen der Effektivwerte der aufgedrückten Spannungen und der Teilströme der Frequenzen ω_q mit u_{qm} und i_{qm} , so bedeutet der Umkehrungs-

satz (25), daß man bei phasenrechten Spannungen einen frequenzunabhängigen, linearen passiven $2r$ -Pol entwerfen kann, der mit beliebiger Genauigkeit die Verknüpfung zwischen den verschiedenen $u_{\sigma m}$ und $i_{\sigma m}$ wiedergibt, wenn nur die Änderungen genügend klein sind. Die Elemente der Leitwertmatrix dieses $2r$ -Poles sind durch die Gleichungen gegeben:

$$Y_{\sigma\sigma} = \frac{\partial J_{\sigma \text{ eff}}}{\partial U_{\sigma \text{ eff}}} = \frac{\partial J_{\sigma \text{ eff}}}{\partial U_{\sigma \text{ eff}}}. \quad (25a)$$

Aus dem Umkehrungssatz (25) läßt sich noch eine andere Folgerung ziehen. Wenn die aufgedrückten Spannungen phasenrecht sind, so hängen die Effektivwerte der Teilströme in bestimmter Weise von den Effektivwerten der aufgedrückten Spannungen ab, so auch insbesondere diejenigen Teilströme, welche die gleichen Frequenzen wie die aufgedrückten Spannungen haben:

$$J_{\sigma \text{ eff}} = J_{\sigma \text{ eff}}(U_0, U_{1 \text{ eff}}, U_{2 \text{ eff}}, \dots, U_{r \text{ eff}}).$$

Diese Zusammenhänge lassen sich durch einen nichtlinearen frequenzunabhängigen $2r$ -Pol veranschaulichen.

Die Gl. (25) besagen nun, daß sich stets eine übergeordnete Funktion

$$F(U_0, U_{1 \text{ eff}}, U_{2 \text{ eff}}, \dots, U_{r \text{ eff}})$$

angeben läßt, aus der sich die Abhängigkeit der Effektivwerte der frequenzgleichen Teilströme von den Effektivwerten der aufgedrückten Spannungen durch partielle Differentiation ableiten läßt:

$$J_{\sigma \text{ eff}} = \frac{\partial F}{\partial U_{\sigma \text{ eff}}}. \quad (26)$$

Wir wollen F die für den $2r$ -Pol charakteristische erzeugende Funktion nennen. Setzt man die Gl. (26) in die Gl. (25) ein, so ergibt sich eine Identität.

Die Elemente der Leitwertmatrix können daher auch ausgedrückt werden durch

$$Y_{\sigma\sigma} = \frac{\partial^2 F}{\partial U_{\sigma \text{ eff}} \partial U_{\sigma \text{ eff}}}. \quad (27)$$

Die Funktion F ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Aus obigem ergibt sich, daß sich jeder nichtlineare $2r$ -Pol, der den Zusammenhang zwischen den Effektivwerten der aufgedrückten phasenrechten Spannungen und denjenigen der frequenzgleichen Teilströme des nichtlinearen Zweipoles wiedergibt, durch eine *einzige* Funktion¹² exakt beschreiben läßt.

Dieselbe Folgerung läßt sich übrigens auch aus der trivialen Form des Umkehrungssatzes (5) für den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Strömen eines jeden $2r$ -Poles ableiten, der nur aus frequenzunabhängigen linearen und nichtlinearen Zweipolen zusammengesetzt ist.

4. Der nichtlineare frequenzunabhängige Vierpol.

In einem nichtlinearen frequenzunabhängigen Vierpol ist der Zusammenhang zwischen den Strömen und Spannungen beispielsweise durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$i_I = f_I(u_I, u_{II}); \quad i_{II} = f_{II}(u_I, u_{II}).$$

Die Zählpfeile seien nach Abb. 1b festgesetzt.

¹² Selbstverständlich gibt es auch andere erzeugende charakteristische Funktionen zur eindeutigen Kennzeichnung je nach der Schreibweise des Umkehrungssatzes analog den Varianten der Gl. (3a) bis (3d).

Ein frequenzunabhängiger nichtlinearer Vierpol soll passiv genannt werden, wenn für ihn der Umkehrungssatz in der trivialen Form der Gl. (5) gilt, das heißt, wenn die Funktionen f_I und f_{II} miteinander durch die Beziehung verknüpft sind

$$\left(\frac{\partial f_I}{\partial u_{II}} \right)_{u_I} = \left(\frac{\partial f_{II}}{\partial u_I} \right)_{u_{II}}. \quad (28)$$

Wie in Abschnitt 2 ausgeführt wurde, ist beispielsweise ein jeder nichtlinearer Vierpol in diesem Sinne passiv, der nur aus frequenzunabhängigen linearen und nichtlinearen Zweipolen zusammengesetzt ist.

Wie aus der Gl. (28) folgt, gibt es eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte, für den Vierpol charakteristische erzeugende Funktion $F(u_I, u_{II})$, aus der die Funktionen f_I und f_{II} durch partielle Differentiation gewonnen werden können.

$$f_I(u_I, u_{II}) = \frac{\partial F(u_I, u_{II})}{\partial u_I}; \quad f_{II}(u_I, u_{II}) = \frac{\partial F(u_I, u_{II})}{\partial u_{II}}. \quad (28)$$

Werden einem solchen Vierpol verschiedene Spannungen aufgedrückt, deren Frequenzen einstweilen inkommensurabel vorausgesetzt werden,

$$u_I = \sum_{\varrho=1}^r U_{I\varrho} \cdot \cos(\omega_{\varrho} t + \varphi_{\varrho}); \quad u_{II} = \sum_{\sigma=1}^s U_{II\sigma} \cdot \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}),$$

so bestehen die Klemmenströme des Vierpoles aus allen möglichen Kombinationschwingungen mit den Kombinationskreisfrequenzen $|\Sigma m_{\varrho} \omega_{\varrho} + \Sigma n_{\sigma} \omega_{\sigma}|$ mit beliebigen positiven oder negativen ganzzahligen m_{ϱ} und n_{σ} . Die Amplituden der Kombinationsschwingungen können nach den Regeln der Fourier-Analyse leicht durch Verallgemeinerung der Gl. (13) ermittelt werden.

$$J_{m_1 \dots m_r, n_1 \dots n_s} = \frac{2}{(2\pi)^{r+s}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f \left(\sum_{\varrho=1}^r U_{\varrho} \cdot \cos x_{\varrho}, \sum_{\sigma=1}^s U_{\sigma} \cdot \cos y_{\sigma} \right) \cdot \prod_{\varrho=1}^r \cos m_{\varrho} x_{\varrho} \cdot \prod_{\sigma=1}^s \cos n_{\sigma} y_{\sigma} \cdot dx_1 \dots dx_r dy_1 \dots dy_s. \quad (29)$$

Für die Teilströme der linken bzw. der rechten Seite des Vierpoles sind J und f noch mit dem Index I oder II zu versehen. Für den Gleichstrom ist der halbe Wert der obigen Formel zu nehmen.

Bezeichnet man die Effektivwerte der Teilströme der Frequenzen ω_{ϱ} bzw. ω_{σ} mit $J_{\varrho \text{ eff}}$ bzw. $J_{\sigma \text{ eff}}$ und die Effektivwerte der Spannungen mit $U_{\varrho \text{ eff}}$ bzw. $U_{\sigma \text{ eff}}$, so kann aus den Gl. (29) analog den Gl. (14) abgeleitet werden:

$$\frac{\partial J_{I \varrho' \text{ eff}}}{\partial U_{I \varrho'' \text{ eff}}} = \frac{\partial J_{I \varrho'' \text{ eff}}}{\partial U_{I \varrho' \text{ eff}}}; \quad \frac{\partial J_{II \sigma' \text{ eff}}}{\partial U_{II \sigma'' \text{ eff}}} = \frac{\partial J_{II \sigma'' \text{ eff}}}{\partial U_{II \sigma' \text{ eff}}}. \quad (30a)$$

Ebenso ergibt sich mit Hilfe der Gl. (28)

$$\frac{\partial J_{I \varrho \text{ eff}}}{\partial U_{II \sigma \text{ eff}}} = \frac{\partial J_{II \sigma \text{ eff}}}{\partial U_{I \varrho \text{ eff}}}. \quad (30b)$$

Die Gl. (30a) und (30b) sind der Umkehrungssatz für den linearen frequenzunabhängigen $2(r+s)$ -Pol der Abb. 11, der mit beliebiger Genauigkeit den Zusammenhang zwischen den genügend klein vorausgesetzten Änderungen der Effektivwerte der aufgedruckten Spannungen und der gleichfrequenten Teilströme ausdrückt, das heißt, daß dieser $2(r+s)$ -Pol durch passive Schaltelemente realisiert werden kann.

Lassen sich ganzzahlige Koeffizienten finden, so daß zwischen den Frequenzen der aufgedruckten Spannungen Gleichungen der Art (23) aufgestellt werden können, dann gilt der Umkehrungssatz (30a) bzw. (30b) nur für die Wirkkomponenten der

Ströme. Bestehen aber gleichzeitig die Beziehungen (24), das heißt sind die aufgedrückten Spannungen phasenrecht, dann verschwinden alle Blindströme, die Gl. (30a) und (30b) gelten ohne sonstige Einschränkung und die Verknüpfung der Änderungen der Effektivwerte wird durch das Ersatzschaltbild der Abb. 11 mit beliebiger Genauigkeit wiedergegeben.

Bei der Ableitung des Umkehrungssatzes (30a) und (30b) war die einzige Voraussetzung der triviale Umkehrungssatz (28). Infolgedessen gelten die Gl. (30a) und (30b) auch für diejenigen frequenzunabhängigen nichtlinearen $2n$ -Pole, welche, wie die Abb. 5 und 8, den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Effektivwerten der aufgedrückten Spannungen und der Teilströme gleicher Frequenz veranschaulichen. Die Gl. (8), (14) und (25) spielen dann für den $2n$ -Pol höherer Ordnung die Rolle des trivialen Umkehrungssatzes. Das bedeutet, daß der Umkehrungssatz auch bei

mehrfacher Amplitudenmodulation gilt, vorausgesetzt, daß alle Spannungen phasenrecht sind.

Die Verallgemeinerung des Umkehrungssatzes auf primäre passive Sechspole, Achtpole usw. sowie auf die daraus abgeleiteten $2n$ -Pole höherer Ordnung ist unmittelbar einleuchtend.

Schließlich ergibt sich aus den Umkehrungssätzen (28) bzw. (30a) und (30b), daß sich für jeden passiven nichtlinearen frequenzunabhängigen $2n$ -Pol, sei er primär oder höherer Ordnung, eine einzige bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Funktion der Effektivwerte der aufgedrückten (phasenrechten) Spannungen angeben werden kann, die den $2n$ -Pol vollständig charakterisiert und aus der die frequenzgleichen Teilströme durch partielle Differentiation nach Art der Gl. (26) abgeleitet werden können.

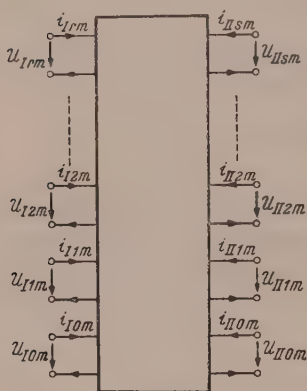


Abb. 11.

5. Zusammenschaltung von linearen und nichtlinearen Schaltelementen.

a) Allgemeines.

Bisher wurde das Verhalten der nichtlinearen Schaltelemente im Kurzschlußfall untersucht, das heißt unter der Annahme, daß ihnen verschiedene Urspannungen direkt aufgedrückt werden und daß sonst keine anderen Schaltelemente vorhanden sind. Im allgemeinen sind jedoch in den Übertragungssystemen lineare und nichtlineare Schaltelemente vereinigt. Während von den nichtlinearen Schaltelementen weiterhin Frequenzunabhängigkeit vorausgesetzt wird, was für die meisten Schaltungen zur Übertragung und Frequenzumsetzung amplitudenmodulierter Schwingungen mit genügender Genauigkeit zutrifft, ist die Frequenzabhängigkeit der verschiedentlichen linearen Elemente, wie Induktivitäten und Kapazitäten, als wesentliches Merkmal der Schaltung anzusehen. Den weiteren Untersuchungen sind dementsprechende Schaltungen zugrunde gelegt, die einerseits aus nichtlinearen frequenzunabhängigen und andererseits aus linearen frequenzabhängigen Elementen zusammengesetzt sind. Vorausgeschickt sei, daß in Schaltungen, die nur lineare Schaltelemente enthalten, jede Teilschwingung für sich unabhängig von allen anderen untersucht werden kann, da ja das Superpositions-gesetz gilt.

Bei den bisherigen Untersuchungen zeigte sich, daß bei Aussteuerung eines nichtlinearen Systems durch eine Reihe von Wechselspannungen im allgemeinen alle möglichen Kombinationsschwingungen entstehen. An dieser Tatsache ändert sich auch nichts durch Hinzufügen linearer Schaltelemente. Findet nämlich ein Teilstrom des nichtlinearen Gliedes einen endlichen Scheinwiderstand in der übrigen

Schaltung vor, so ruft er eine Spannung derselben Frequenz hervor. Für das nichtlineare Glied bedeutet dies, daß außer den von außen her aufgedrückten Spannungen zusätzlich diese neue Spannung an ihm auftritt, das heißt, daß das nichtlineare Glied auch Kombinationsschwingungen zwischen dieser neuen Spannung und den ursprünglichen Spannungen produziert, sogenannte Interkombinationsschwingungen. Dadurch wird aber die Frequenzmannigfaltigkeit, die Vielfachheit der Periodizität nicht vermehrt, denn die Frequenz dieser neuen Spannung ist ja als Kombinationsfrequenz der von außen aufgedrückten Frequenzen aus ganzzahligen Vielfachen dieser zusammengesetzt. Ebensowenig wird die Frequenzmannigfaltigkeit vermehrt, wenn neue nichtlineare Schaltelemente zu einer schon bestehenden Schaltung hinzugefügt werden, das heißt es treten in jeder beliebigen stabilen Schaltung im allgemeinen alle möglichen Kombinationsschwingungen der von außen aufgedrückten Spannungen auf, und zwar nur diese, jedoch mit anderer Amplitude und Phase als im Kurzschlußfall.

Die Zerlegung der Ströme und Spannungen in Kombinationsschwingungen wäre allerdings praktisch wertlos, wenn alle unendlich vielen Kombinationsschwingungen bei der Berechnung berücksichtigt werden müßten. Liegen doch z. B. bei irrationalem Frequenzverhältnis zweier aufgedrückter Spannungen in jedem noch so kleinen Frequenzintervall unendlich viele Kombinationsfrequenzen. Es ist aber unter den Kombinationsschwingungen eine Auslese aus zwei Gründen möglich: 1. werden die Amplituden der Kombinationsschwingungen rasch vernachlässigbar klein, wenn ihre Ordnung, das heißt die Summe $\sum |m_e|$ genügend groß ist und 2. werden gewöhnlich durch die linearen Schaltelemente Schwingungen außerhalb bestimmter Frequenzbereiche unterdrückt.

Die Frage, welche Kombinationsschwingungen nun in einem bestimmten Fall noch zu berücksichtigen sind, ist hinsichtlich der Frequenzselektion durch die linearen Schaltelemente meist aus der Schaltung heraus leicht zu beantworten. Schwieriger ist das Problem bezüglich der Ordnungszahl der Kombinationsschwingungen, da die Grenze unter anderem wesentlich von der Kennlinienform und von der Größe der aufgedrückten Spannungen abhängt.

Bei der störenden Kombinationstonbildung durch nichtlineare Teile in niederfrequenten Übertragungssystemen ist ein Kriterium in geschlossener Form überhaupt kaum aufstellbar. Das gleiche gilt analog bei der Übertragung amplitudenmodulierter Schwingungen für die Verzerrungen der Modulation. Da jedoch in dieser Arbeit prinzipiell kleine Niederfrequenzsignale und kleine Modulationsgrade vorausgesetzt sind, können hier die Niederfrequenz- und die Modulationsverzerrungen von vornherein vernachlässigt werden, so daß nur die Kombinationsschwingungen aus den Trägerschwingungen zu berücksichtigen sind.

Treten an einem nichtlinearen Schaltelement mehrere Trägerspannungen auf, so ist zu unterscheiden, ob zwischen den Trägerfrequenzen Beziehungen in der Form der Gl. (23) bestehen oder nicht. Beispielsweise ist bei zwei Trägern die Berechnung der Teilschwingungen verschieden, je nachdem, ob das Frequenzverhältnis ein rationales oder irrationales ist. Die Unterscheidung erscheint allgemein zunächst schwierig oder gar unmöglich, ist aber in der Praxis in Zweifelsfällen meist in einem anderen Sinne belanglos.

Sind einerseits die Trägerfrequenzen von vornherein durch ihre Entstehungsgeschichte kommensurabel, wie z. B. bei der Frequenzvervielfachung, so liegt ein klarer Fall vor. Werden andererseits die Träger oder diejenigen Schwingungen, aus denen die Träger abgeleitet werden, unabhängig voneinander erzeugt, so muß ohnedies getrachtet werden, daß unerwünschte Kombinationsschwingungen höchstens dann in das Nutzfrequenz- bzw. Modulationsband fallen, wenn ihre Amplituden zufolge der hohen Ordnungszahl schon vernachlässigbar klein sind. Beispielsweise

wird in einem Überlagerungsempfänger die Oszillatorfrequenz so gewählt, daß außer der Differenzfrequenz zwischen Oszillatorschwingung und empfangener Hochfrequenzschwingung keine weiteren höheren Kombinationsschwingungen aus ihnen mit berücksichtigenswerter Amplitude in das Zwischenfrequenzband fallen. Daraus, daß nur eine der in das Nutzfrequenzband fallenden Kombinationsschwingungen zu berücksichtigen ist, ergibt sich, daß ein eventuell vorhandenes rationales Frequenzverhältnis praktisch das gleiche Ergebnis liefern würde wie ein irrationales. Da der Rechnungsgang bei inkommensurablen Trägerfrequenzen wesentlich einfacher ist, empfiehlt es sich, diesen Fall anzunehmen.

b) Langsam veränderliche Amplituden.

Zufolge der Gültigkeit des Umkehrungssatzes war es möglich, für passive, frequenzunabhängige nichtlineare Systeme lineare Ersatzschaltungen anzugeben, die den Zusammenhang zwischen kleinen Änderungen der Effektivwerte der Teilschwingungen veranschaulichen. Ebenso gilt in jedem linearen frequenzabhängigen System der Kirchhoffsche Umkehrungssatz (4) für die Vektoren der Spannungen und Ströme und damit auch für ihre gerichteten Änderungen. Es fragt sich nun, ob es möglich ist, bei einer Zusammenschaltung linearer und nichtlinearer passiver Elemente ein geschlossenes Ersatzschaltbild anzugeben.

Im allgemeinen werden bei einer Zusammenschaltung die Spannungen und Ströme gleicher Frequenz nicht mehr in Phase sein. Im Abschnitt 3 b wurde gezeigt, daß in nichtlinearen Systemen ein Umkehrungssatz nur für die Wirkkomponenten aufgestellt werden kann. Bei beliebiger Phasenlage zwischen Spannung und Strom einer bestimmten Teilschwingung eines nichtlinearen Zweipoles können beide in je zwei paarweise phasengleiche Komponenten zerlegt werden, für die untereinander und zusammen mit den übrigen derartig zerlegten Teilschwingungen der Umkehrungssatz gilt. Die Ersatzschaltung enthält dann für jede aufgedrückte Frequenz zwei Klemmenpaare. Man erhält gleichsam zwei Spannungs- und Stromsysteme mit den gleichen Frequenzen, aber verschiedenen Phasen, die untereinander und innerhalb ihrer selbst durch den Umkehrungssatz verknüpft sind. Der Phasenunterschied zwischen den gleichfrequenten Schwingungen in beiden Systemen kann zweckmäßig gleich $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden.

In linearen Systemen bereitet es keine Schwierigkeit, alle Spannungen und Ströme einer bestimmten Teilschwingung in zwei Systeme mit einem Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ zu zerlegen. Wie sich aber zeigt, gilt wohl innerhalb jedes dieser Systeme der Umkehrungssatz, nicht jedoch für die Wechselwirkung zwischen beiden.

Zum Beweis, daß innerhalb eines Phasensystems der Umkehrungssatz gilt, denke man sich den Vektor irgendeiner dem passiven linearen Netzwerk aufgedruckten Urspannung bei Konstanzhaltung der übrigen Urspannungen um eine kleine Größe $dU_{1\varphi}$ verändert, deren Phase mit der dem Komponentensystem zugrunde gelegten ausgezeichneten Phase übereinstimmt. Dadurch wird der Strom an einer anderen Stelle des Netzwerkes vektoriell um $d\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{Y}_{21} \cdot dU_{1\varphi}$ verändert, wenn $-\mathfrak{Y}_{21}$ der Kernleitwert ist. Mit $\mathfrak{Y}_{21} = Y_r + j Y_x$ ergibt sich die in die ausgezeichnete Phasenrichtung fallende Komponente der Stromänderung als Vektor geschrieben mit $d\mathfrak{J}_{2\varphi} = Y_r \cdot dU_{1\varphi}$. Fügt man umgekehrt an der zweiten Stelle des Netzwerkes eine kleine Urspannung $dU_{2\varphi}$ von derselben ausgezeichneten Phasenlage hinzu, so ist die Zunahme des Stromvektors an der ersten Stelle $d\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{Y}_{12} \cdot dU_{2\varphi}$, wobei wegen des Kirchhoffschen Umkehrungssatzes (3a) in beiden Richtungen derselbe Kernleitwert $\mathfrak{Y}_{12} = \mathfrak{Y}_{21}$ gilt. Die in die ausgezeichnete Phasenrichtung fallende Komponente von $d\mathfrak{J}_1$ ist vektoriell $d\mathfrak{J}_{1\varphi} = Y_r \cdot dU_{2\varphi}$, es gilt somit für ein Komponentensystem,

das heißt für die Komponenten aller Spannungen und Ströme in einer bestimmten Phasenrichtung der Umkehrungssatz:

$$\frac{\partial J_{2\varphi}}{\partial U_{1\varphi}} = \frac{\partial J_{1\varphi}}{\partial U_{2\varphi}}. \quad (31)$$

Demgegenüber gilt zwischen zwei solchen Komponentensystemen gleicher Frequenz und verschiedener Phase wechselseitig der Umkehrungssatz nicht. Dies kann an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Drückt man einem linearen Zweipol mit dem Scheinleitwert $\mathfrak{G} = G + j Y$ eine Wechselspannung auf, deren Vektor in zwei Komponenten zerlegt werden soll $\mathfrak{U} = U_r + j U_x$, so ist der Vektor des Zweipolstromes

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{G} \mathfrak{U} = G U_r - Y U_x + j (G U_x + Y U_r) = J_r + j J_x.$$

Die Änderungen der Komponenten des Stromes in Abhängigkeit von den Änderungen der Komponenten der Spannung sind:

$$\frac{\partial J_r}{\partial U_r} = G; \quad \frac{\partial J_r}{\partial U_x} = -Y; \quad \frac{\partial J_x}{\partial U_r} = Y; \quad \frac{\partial J_x}{\partial U_x} = G.$$

Die dem Umkehrungssatz entsprechende Formel unterscheidet sich hier durch das entgegengesetzte Vorzeichen grundlegend von den bisherigen:

$$\frac{\partial J_r}{\partial U_x} = -\frac{\partial J_x}{\partial U_r}. \quad (32)$$

Die Verknüpfung zwischen den zwei Komponentensystemen der Spannungen und Ströme einer bestimmten Frequenz untereinander befolgt somit ein anderes Gesetz als in nichtlinearen Systemen.

Aus diesen Ergebnissen kann abgeleitet werden, unter welchen Umständen für eine Zusammenschaltung von linearen und nichtlinearen Schaltelementen ein geschlossenes Ersatzschaltbild gezeichnet werden kann.

An den Knotenpunkten des elektrischen Netzwerkes, an denen lineare und nichtlineare Teile zusammenstoßen, müssen solche Verhältnisse vorliegen, daß die Unterschiede in den Umkehrungssätzen für lineare und für nichtlineare Systeme nicht zur Geltung kommen. Dieser Unterschied besteht einzig in der Verschiedenheit des Vorzeichens bei der Zerlegung in zwei Phasensysteme [siehe Gl. (32)]. Beschreibt je ein einziges Phasensystem für jede berücksichtigenswerte Teilschwingung alle Spannungen und Ströme an den Berührungspunkten von linearen und nichtlinearen Teilen vollständig, dann werden die Unterschiede in den Umkehrungssätzen irrelevant und bilden kein Hindernis für die Überbrückung der Berührungspunkte durch ein geschlossenes Ersatzschaltbild. Das Genügen je eines einzigen Phasensystems zur vollständigen Beschreibung der Spannungen und Ströme bedeutet, daß alle Spannungen und Ströme derselben Frequenz an den Berührungsstellen die gleiche (bzw. entgegengesetzte) Phase haben.

Die Phasengleichheit muß auch gefordert werden, wenn die Amplituden der aufgedrückten Spannungen in beliebiger Weise verändert und wenn irgendwelche Kennlinien der nichtlinearen Schaltelemente angenommen werden, damit das Ersatzschaltbild nicht nur auf bestimmte Spannungen und bestimmte Charakteristiken der nichtlinearen Elemente beschränkt ist. Damit die Phasenbedingung erfüllt ist, muß die Schaltung drei Bedingungen erfüllen:

1. müssen die Phasen der aufgedrückten Spannungen konstant bleiben, nur ihre Amplituden dürfen sich verändern;
2. müssen die linearen Teile der Schaltung an diesen Knotenpunkten rein reelle Scheinleitwerte und Kernleitwerte haben, das heißt mit anderen Worten: denkt man sich die nichtlinearen Teile aus der Schaltung entfernt, so verbleibt ein lineares Netz-

werk, das so viele Klemmen hat, als es Berührungsknotenpunkte mit den nichtlinearen Teilen gegeben hat; die Leitwertsmatrix dieses verbleibenden linearen Netzwerkes muß für alle berücksichtigenswerten Teilschwingungen reell sein;

3. müssen dann, wenn für die Frequenzen der an den Klemmen der nichtlinearen Teile auftretenden Spannungen Beziehungen nach Art der Gl. (23) aufstellbar sind, auch die zugehörigen Phasenbedingungen (24) erfüllt sein, wenn Spannungen und Ströme in Phase sein sollen. Da die nichtlinearen Teile selbst frequenzunabhängig sind und die Leitwertsmatrix des linearen Restnetzwerkes, das nach der Entfernung der nichtlinearen Teile übrig bleibt, für alle berücksichtigenswerten Teilschwingungen reell angenommen wurde, genügt es, folgendes zu fordern: Bestehen zwischen den Frequenzen der von außen aufgedrückten Spannungen Beziehungen nach Art der Gl. (23), so müssen für die Phasen der Leerlaufspannungen an allen Klemmen des linearen Restnetzwerkes die zugehörigen Gl. (24) gelten.

Zu diesen drei Bedingungen für die Phasengleichheit aller Spannungen und Ströme derselben Frequenz an den Berührungsstellen sei noch bemerkt, daß eine Phasengleichheit auch denkbar wäre, wenn die drei Bedingungen nicht erfüllt wären, indem bei nicht reeller Leitwertsmatrix des linearen Restnetzwerkes phasenreine Ströme durch aufgedrückte Spannungen erzwungen werden, deren Phasen nicht den Gl. (24) genügen. Unter diesen Umständen werden aber bei Veränderung der Amplituden der aufgedruckten Spannungen die Phasenverhältnisse sicher geändert und gerade die Veränderung der Amplituden ist das wesentliche Merkmal der Amplitudenmodulation, daher müssen diese Sonderfälle aus der allgemeinen Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Phasengleichheit bei Erfüllung obiger Bedingungen ist eine prinzipielle, das heißt unabhängig von den Amplituden der aufgedruckten Spannungen und von den Kennlinien der nichtlinearen Teile.

c) Kriterien und Regeln für das Zeichnen eines umfassenden Ersatzschaltbildes bei rasch veränderlichen Amplituden.

Im vorhergehenden Abschnitt wurden Kriterien abgeleitet, wann für eine Schaltung, die aus linearen und nichtlinearen Elementen besteht, eine durchgehende lineare Ersatzschaltung gezeichnet werden kann, welche die Verknüpfung der kleinen Änderungen der Effektivwerte von den verschiedenen Teilschwingungen wiedergibt. Dabei war implizite vorausgesetzt, daß die Änderungen so langsam vor sich gehen, daß man dauernd den eingeschwungenen stationären Zustand annehmen kann.

Demgegenüber ist nun weiterhin zu berücksichtigen, daß bei der Übertragung amplitudenmodulierter Schwingungen verschiedene frequenzabhängige Schaltelemente, wie Schwingungskreise u. dgl., den rascheren Amplitudenänderungen durch die Modulation nicht mehr trägheitslos folgen können. Ferner bedeutet die Modulation das Entstehen neuer Teilschwingungen, nämlich der Seitenschwingungen oder Seitenbänder, deren Frequenzen symmetrisch zu beiden Seiten der einzelnen Trägerfrequenzen liegen.

Was das Hinzutreten der Seitenschwingungen anbelangt, muß im Sinne der früheren allgemeinen Überlegungen (Abschnitt 5 a) gefordert werden, daß sich die Seitenbänder von Trägerschwingungen berücksichtigenswerter Größe in Frequenzbereichen, die nicht durch die linearen Schaltelemente unterdrückt werden, nicht gegenseitig überlappen. Diese Forderung nach entsprechender Wahl der Trägerfrequenzen muß auch schon aus praktischen Gründen gestellt werden und ist im allgemeinen leicht zu erfüllen, da die Modulationsfrequenzen meist um mehrere Größenordnungen kleiner sind als die Trägerfrequenzen. Seitenschwingungen höherer Ordnung brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden, weil bei den als klein vorausgesetzten Modulationsgraden die Modulationsverzerrungen vernachlässigbar sind.

Die durch die Trägheit der frequenzabhängigen Schaltelemente verursachten Abweichungen vom stationären Zustand bei rascher Modulation sind insofern von wesentlicher Bedeutung, als ein durchgehendes Ersatzschaltbild nur gezeichnet werden kann, wenn die im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Phasenbeziehungen herrschen. Bei rasch veränderlichen Amplituden kann daher dann und nur dann ein Ersatzschaltbild entworfen werden, wenn die Phasen der hochfrequenten Schwingungen in jedem Augenblick die gleichen sind wie im stationären Zustand ohne Modulation. Da die nichtlinearen Schaltelemente frequenzunabhängig angenommen sind, braucht nur das Verhalten der linearen Schaltungsteile bei rasch veränderlichen Amplituden untersucht zu werden.

Als einfachster Fall sei ein linearer Zweipol angenommen, durch den ein Strom geschickt wird, dessen Amplitude im Takt einer Niederfrequenz ω sinusförmig moduliert ist. Ein solcher Strom ist bekanntlich äquivalent drei rein sinusförmigen Schwingungen, dem Träger und den beiden Seitenschwingungen mit den Kreisfrequenzen Ω , $\Omega + \omega$, $\Omega - \omega$. In symbolischer Schreibweise ist der Strom

$$\begin{aligned} i &= \mathfrak{I}_r \cdot e^{j\Omega t} \cdot [1 + m \cos(\omega t + \varphi)] = \\ &= \mathfrak{I}_r \cdot e^{j\Omega t} + \frac{m}{2} \mathfrak{I}_r \cdot e^{j[(\Omega + \omega)t + \varphi]} + \frac{m}{2} \mathfrak{I}_r \cdot e^{j[(\Omega - \omega)t - \varphi]}. \end{aligned} \quad (33)$$

Bezeichnet man den Scheinwiderstand des Zweipoles für diese drei Frequenzen mit $\mathfrak{Z}_\Omega$, $\mathfrak{Z}_{\Omega + \omega}$ und $\mathfrak{Z}_{\Omega - \omega}$, so tritt an dem Zweipol die Spannung auf:

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{Z}_\Omega \cdot \mathfrak{I}_r \cdot e^{j\Omega t} + \mathfrak{Z}_{\Omega + \omega} \cdot \frac{m}{2} \mathfrak{I}_r e^{j[(\Omega + \omega)t + \varphi]} + \mathfrak{Z}_{\Omega - \omega} \cdot \frac{m}{2} \mathfrak{I}_r \cdot e^{j[(\Omega - \omega)t - \varphi]} = \\ &= \mathfrak{Z}_\Omega \mathfrak{I}_r \cdot e^{j\Omega t} \cdot \left\{ 1 + \frac{m}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_{\Omega + \omega}}{\mathfrak{Z}_\Omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{m}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_{\Omega - \omega}}{\mathfrak{Z}_\Omega} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß die durch die Gl. (34) definierte Spannung eine Schwingung ist, von der sich nur die Amplitude, nicht aber die Phase im Rhythmus der Niederfrequenz ändert, ist die Bedingung, daß der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gl. (34) reell bleibt. Dies ist allgemein dann der Fall, wenn $\frac{\mathfrak{Z}_{\Omega + \omega}}{\mathfrak{Z}_\Omega}$

und $\frac{\mathfrak{Z}_{\Omega - \omega}}{\mathfrak{Z}_\Omega}$ zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen sind. Daraus folgt, daß

bei sinusförmiger Amplitudenmodulation dann und nur dann die Phasenverhältnisse von Hochfrequenzspannung und -strom in jedem Augenblick dieselben sind wie im unmodulierten Zustand, wenn die Scheinwiderstände für die beiden Seitenfrequenzen gleichen Betrag haben und der Mittelwert ihrer Phasenwinkel gleich dem Phasenwinkel des Scheinwiderstandes für die Trägerfrequenz ist (Abb. 12a). Solche Scheinwider-

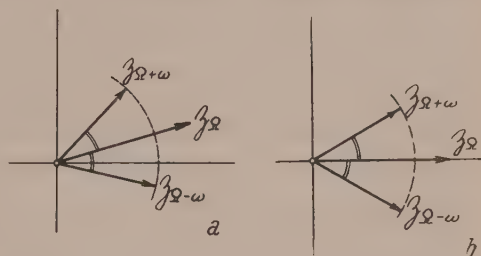


Abb. 12.

stände seien symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenz genannt. Abb. 12b zeigt den Sonderfall, daß gleichzeitig der Scheinwiderstand für die Trägerfrequenz reell ist.

Aus diesem einfachen Beispiel kann leicht auf den allgemeinen Fall geschlossen werden.

Einerseits kann man sich von der bisherigen Einschränkung der rein sinusförmigen Amplitudenschwankung dadurch freimachen, daß sich jeder zeitliche Verlauf der Hochfrequenzamplitude nach Fourier durch eine Reihe oder ein Integral über verschiedene Sinusfunktionen darstellen läßt. Wenn nun für alle Niederfrequenzen ω

innerhalb des übertragenen Frequenzbandes die Symmetriebedingung des Scheinwiderstandes erfüllt ist, so ist damit die hochfrequente Phasenkonstanz für jedes Modulationssignal gewährleistet. Andererseits bereitet es keine Schwierigkeiten, dieselben Überlegungen, wie sie hier für den Scheinwiderstand eines linearen Zweipoles durchgeführt wurden, auf andere Frequenzcharakteristiken zu verallgemeinern, die irgendeinen Zusammenhang zwischen zwei Strömen und Spannungen darstellen.

Damit können die Bedingungen, unter denen auch bei rasch veränderlichen Amplituden ein durchgehendes Ersatzschaltbild für die Änderungen der Effektivwerte gezeichnet werden kann, folgendermaßen formuliert werden:

1. Die Phasen der von außen aufgedrückten Urspannungen und Urströme müssen konstant bleiben, nur ihre Amplituden dürfen sich ändern.

2. Denkt man sich die nichtlinearen Teile aus der Schaltung entfernt, so bleibt ein lineares Netzwerk übrig, dessen Klemmen mit den Berührungspunkten von linearem und nichtlinearem Teil der Schaltung identisch sind; die Elemente der Leitwertmatrix dieses linearen Restnetzwerkes müssen für alle berücksichtigungswerten Träger-schwingungen reell und im Frequenzgebiet der Seitenbänder symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenzen sein¹³.

3. Wenn für die Frequenzen der von außen aufgedrückten Trägerschwingungen Beziehungen nach Art der Gl. (23) aufgestellt werden können, müssen für die Phasen der berücksichtigungswerten Leerlaufspannungen an allen Klemmen des linearen Restnetzwerkes die zugehörigen Gl. (24) gelten.

4. Die Frequenzcharakteristiken, welche den Zusammenhang zwischen den von außen aufgedrückten Urspannungen und Urströmen und den berücksichtigungswerten Leerlaufspannungen an den Klemmen des linearen Restnetzwerkes angeben, müssen im Bereich der Seitenbänder symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenzen sein.

5. Die Frequenzcharakteristiken zwischen den Ausgangsspannungen bzw. -strömen einerseits und den Klemmenspannungen des linearen Restnetzwerkes sowie den äußeren Urspannungen und Urströmen andererseits müssen in der Umgebung der berücksichtigungswerten Trägerschwingungen symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenzen sein.

Diese Bedingungen sind tatsächlich meist mit genügender Genauigkeit bei den Schaltungen zur Übertragung und Frequenzumsetzung von amplitudenmodulierten Schwingungen erfüllt, um Modulationsverzerrungen zufolge unsymmetrischer Seitenbandübertragung zu vermeiden.

Nunmehr bleibt nur noch zu zeigen, in welcher Form die linearen Schaltelemente, die den obigen Bedingungen genügen, im niederfrequenten Ersatzschaltbild für die Schwankungen der Effektivwerte einzuzeichnen sind.

Die komplexe Frequenzcharakteristik $\mathfrak{Z}$, welche in bezug auf die Trägerfrequenz $\frac{\Omega}{2\pi}$ symmetrisch angenommen sei, soll den Zusammenhang zwischen irgendeinem Stromvektor und einem Spannungsvektor in den Gl. (33) und (34) darstellen. Bei der Trägerfrequenz sei $\mathfrak{Z}_\Omega = |\mathfrak{Z}_\Omega| \cdot e^{j\varphi}$. Die wieder mit dem Index m bezeichnete Schwankung des Effektivwertes des Stromes in der Gl. (33) ist

$$dJ_{\text{eff}} = i_m = \frac{|\mathfrak{Z}_r|}{\sqrt{2}} \cdot m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{|\mathfrak{Z}_r|}{\sqrt{2}} \cdot m \cdot \operatorname{Re} \{e^{j(\omega t + \varphi)}\}. \quad (35)$$

Die zugehörige Schwankung u_m des Effektivwertes der Spannung in der Gl. (34) ist

$$dU_{\text{eff}} = u_m = \frac{|\mathfrak{Z}_\Omega| \cdot |\mathfrak{Z}_r|}{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{m}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\Omega + \omega}{\mathfrak{Z}_\Omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{m}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\Omega - \omega}{\mathfrak{Z}_\Omega} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} \right].$$

¹³ Diese Bedingung ist auch als erfüllt anzusehen, wenn die Matricelemente einen genügend kleinen oder genügend großen Wert haben, so daß an ihrer Stelle ohne wesentlichen Fehler die Werte 0 oder ∞ eingesetzt werden können.

Wegen der Symmetrie von $\mathfrak{Z}$ in bezug auf die Trägerfrequenz sind die beiden Ausdrücke in der Klammer konjugiert komplex und es ist weiterhin

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{|\mathfrak{Z}_r|}{\sqrt{2}} \cdot m \cdot \operatorname{Re} \{ \mathfrak{Z}_{\Omega+\omega} \cdot e^{-j\zeta_{\Omega}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \} = \\ &= \frac{|\mathfrak{Z}_r|}{\sqrt{2}} \cdot |m \mathfrak{Z}_{\Omega+\omega}| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \zeta_{\Omega+\omega} - \zeta_{\Omega}). \end{aligned} \quad (36)$$

Aus den Gl. (35) und (36) erkennt man, daß die im Takt einer Niederfrequenz ω erfolgende Schwankung i_m des Stromeffektivwertes mit einem Faktor $|\mathfrak{Z}_{\Omega+\omega}|$ und einer Phasendrehung $\zeta_{\Omega+\omega} - \zeta_{\Omega}$ auf die Effektivwertschwankung u_m der Spannung übertragen wird. Man kann nun die sinusförmigen niederfrequenten Schwankungen i_m und u_m selbst durch komplexe Vektoren ersetzen und ausdrücken (vgl. die Einleitung)

$$i_m = \operatorname{Re} \{ \mathfrak{I}_m \cdot e^{j\omega t} \}; \quad u_m = \operatorname{Re} \{ \mathfrak{U}_m \cdot e^{j\omega t} \} \quad (37)$$

und erhält

$$\frac{\mathfrak{U}_m}{\mathfrak{I}_m} = \mathfrak{Z}_{\Omega+\omega} \cdot e^{-j\zeta_{\Omega}}. \quad (38)$$

Im besonderen Fall, daß die Frequenzcharakteristik für die Trägerfrequenz reell ist, $\zeta_{\Omega} = 0$, gilt

$$\frac{\mathfrak{U}_m}{\mathfrak{I}_m} = \mathfrak{Z}_{\Omega+\omega}. \quad (38a)$$

Aus den Gl. (38) bzw. (38a) folgt, daß im niederfrequenten Ersatzschaltbild die Frequenzcharakteristiken durch ein Netzwerk dargestellt werden müssen, das im Hinblick auf die Abhängigkeit von der Niederfrequenz ω den Ausdrücken $\mathfrak{Z}_{\Omega+\omega} \cdot e^{-j\zeta_{\Omega}}$, bzw. $\mathfrak{Z}_{\Omega+\omega}$ äquivalent ist. Die der Modulation entsprechenden Schwankungen der Effektivwerte sind dabei in symbolischer Rechnung als Spannungs- bzw. Stromvektoren in das Schaltbild einzuzichnen, sie werden Modulationsvektoren genannt³. Wie man aus Gl. (38) erkennt, ist die Phase ζ_{Ω} der Frequenzcharakteristik bei der Trägerfrequenz für das niederfrequente Ersatzschaltbild ohne Bedeutung, zwei Frequenzcharakteristiken nach Art der Abb. 12a und 12b werden im Ersatzschaltbild gleich wiedergegeben.

6. Beispiele niederfrequenter Ersatzschaltbilder von linearen Schaltungen.

Im allgemeinen sind die wesentlichen Bestandteile linearer hochfrequenter Schaltungen Resonanzelemente, deren Frequenzcharakteristiken überall mit Ausnahme des schmalen Frequenzbereiches rund um eine Trägerfrequenz herum vernachlässigbar klein oder groß sind. Innerhalb dieses Frequenzbereiches sind gewisse systematische Vereinfachungen der Frequenzcharakteristik erlaubt, so daß ihre Frequenzabhängigkeit bei Symmetrie in bezug auf eine Mittelfrequenz, die Trägerfrequenz, einen gleichen mathematischen Aufbau hat wie niederfrequente Schaltelemente¹⁴. Für diese vereinfachten Funktionen lassen sich in der Umgebung dieses betrachteten Frequenzbereiches dieselben energetischen und Stabilitätsuntersuchungen anstellen, die in niederfrequenten Schaltungen zu Realisierbarkeitsbedingungen führen^{15, 16}. Daraus folgt, daß unter den genannten Umständen stets ein niederfrequentes Ersatzschaltbild gezeichnet werden kann.

¹⁴ R. Feldtkeller: Einführung in die Theorie der Rundfunksiebschaltungen. Leipzig: S. Hirzel. 1940.

¹⁵ W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. I. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft. 1941.

¹⁶ G. Kraus: Über lineare elektrische Übertragungssysteme. Österr. Ingenieur-Arch. 2, H. 4, 286 (1948).

Als einfachstes Beispiel sei ein Parallelschwingungskreis untersucht (Abb. 13a), dessen Resonanzfrequenz mit der Trägerfrequenz zusammenfällt $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Der Scheinleitwert des Schwingungskreises ist bei einer Hochfrequenz $\Omega = \Omega_0 + \omega$ näherungsweise¹⁴

$$\mathfrak{G} = G + j\Omega C + \frac{1}{j\Omega L} \approx G + j2C(\Omega - \Omega_0) = G + j2C\omega. \quad (39)$$

Das niederfrequente Ersatzschaltbild für die Modulationsvektoren ergibt sich daraus unmittelbar als Parallelschaltung eines Leitwertes G und einer Kapazität $2C$ (Abb. 13b).

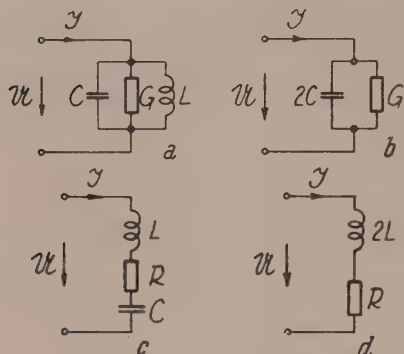


Abb. 13.

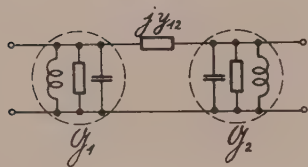


Abb. 14.

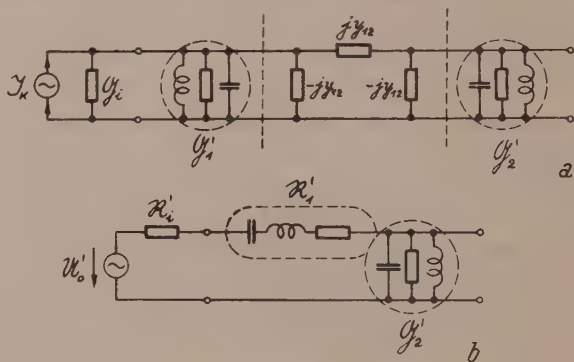


Abb. 15.

Zur Ableitung der Ersatzschaltbilder von Bandfiltern sei ein Weg eingeschlagen, der allgemein die Theorie der Rundfunksiebschaltungen wesentlich zu vereinfachen scheint.

Ein zwei-kreisiges Bandfilter kann nach R. Feldtkeller¹⁴ wie in Abb. 14 dargestellt werden. Der Koppelleitwert jy_{12} ist je nach kapazitiver oder induktiver Kopplung positiv oder negativ imaginär und kann in dem schmalen interessierenden Frequenzintervall als konstant angesehen werden. Denkt man sich die Leitwerte der Schwingungskreise um jy_{12} vergrößert, was Schwingungskreisen mit etwas veränderten Daten $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_2'$ entspricht, und anderseits zusätzlich $-jy_{12}$ parallel geschaltet (Abb. 15a), so entsteht in der Mitte ein Vierpol, welcher die Eigenschaft hat, daß er jede an einer Seite angeschlossene Schaltung widerstandsreziprok bzw. dual auf die andere Seite übersetzt. Wäre also etwa nach Abb. 15a das Bandfilter links von einem aktiven Zweipol mit dem Kurzschlußstrom $\mathfrak{J}_k$ und mit dem inneren Leitwert $\mathfrak{G}_i$ gespeist, so kann die Schaltung nach Abb. 15b umgezeichnet werden, wobei die Beziehungen gelten:

$$\mathcal{U}_0' = \frac{j}{y_{12}} \cdot \mathfrak{J}_k; \quad \mathfrak{R}_i' = \frac{\mathfrak{G}_i}{y_{12}^2}; \quad \mathfrak{R}_1' = \frac{\mathfrak{G}_1'}{y_{12}^2}. \quad (40)$$

Auf ähnliche Art können alle an das Bandfilter angeschlossenen Schaltungen auf

einer Seite dual umgezeichnet werden, sofern das duale Netzwerk existiert¹⁷, im übrigen kann stets ein widerstandsreziprokes statt des dualen Netzwerkes gezeichnet werden.

Für die Schaltung nach Abb. 15b kann nur dann ein Niederfrequenz-Ersatzschaltbild für die Modulationsvektoren gezeichnet werden, wenn $\mathfrak{N}_1'$ und $\mathfrak{G}_2'$ symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenz sind. Außerdem ist als Bedingung für ein vollgültiges Ersatzschaltbild aufgestellt worden, daß auch Eingangs- und Ausgangsscheinwiderstand des Bandfilters symmetrisch in bezug auf die Trägerfrequenz sind. Diese beiden Bedingungen, die übrigens identisch miteinander sind, wie man aus Abb. 15b erkennt, sind dann erfüllt, wenn es sich um abgestimmte Bandfilter handelt, wie sie wegen des besseren Übertragungsfaktors fast ausschließlich verwendet werden. Erkennt man sich an die Abstimmregeln, so erkennt man unmittelbar aus der Abb. 15a, daß

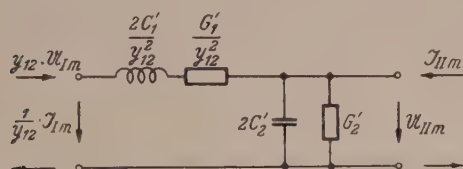


Abb. 16.

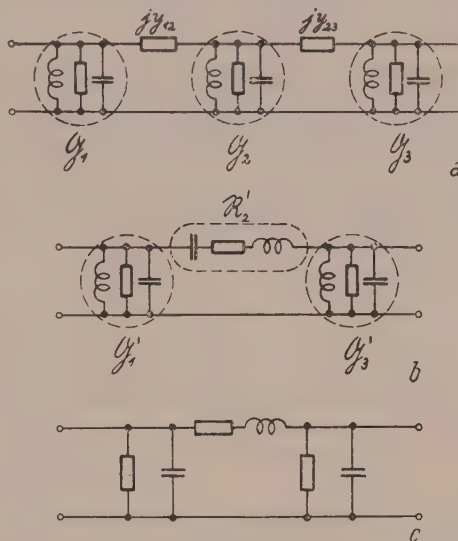


Abb. 17.

bei abgestimmten Bandfiltern $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_2'$ und damit auch $\mathfrak{N}_1'$ und $\mathfrak{G}_2'$ in Abb. 15b die gleiche Resonanzfrequenz haben, die mit der Trägerfrequenz identisch gewählt wird. In diesem Fall kann dann auch das Niederfrequenz-Ersatzschaltbild des Bandfilters für die Modulationsvektoren gezeichnet werden (Abb. 16).

In der gleichen Weise können mehrkreisige Bandfilter umgezeichnet werden, für die stets ein Niederfrequenz-Ersatzschaltbild entworfen werden kann, wenn es sich um abgestimmte Bandfilter handelt. Z. B. kann das dreikreisige Bandfilter der Abb. 17a in die Abb. 17b umgezeichnet werden, wobei hier wegen der doppelten Inversion die angeschlossenen Netzwerke nicht dual umgezeichnet werden müssen. Das entsprechende Niederfrequenz-Ersatzschaltbild für die Modulationsvektoren bei abgestimmtem Bandfilter zeigt Abb. 17c. Aus der sinngemäß erweiterten Abb. 15a lassen sich in einfacher Weise die Abstimmregeln ablesen.

Aus den bisherigen Überlegungen geht ohne weiteres hervor, daß auch jederzeit eine Niederfrequenzschaltung hochfrequent in bezug auf irgendeine Trägerfrequenz umgezeichnet werden kann, oder daß eine auf eine bestimmte Trägerfrequenz bezogene Schaltung auf eine andere Trägerfrequenz umwandelbar ist, jedoch ist stets das niederfrequente Bild am anschaulichsten.

In einer späteren Arbeit wird an einigen wichtigen Anwendungsbeispielen gezeigt werden, wie für konkrete Schaltungen Ersatzschaltbilder gezeichnet werden können, mit deren Hilfe die linearen Verzerrungen, die das niederfrequente Signal bei der Umwandlung in amplitudenmodulierte Schwingungen, bei weiteren Frequenzumsetzungen und bei der Demodulation erfährt, in geschlossener Form erfaßt werden können.

¹⁷ B. D. H. Tellegen: Geometrische Konfigurationen und Dualität von elektrischen Netzwerken. Philips' Techn. Rdsch. 5, H. 11, 332 (1940).

(Eingegangen am 28. Juni 1949.)

Zur Frage der Entzerrung eines Impulsverstärkers.

Von R. Goldberger de Buda, Wien.

Zusammenfassung. Die Arbeit beabsichtigt zu zeigen, wie für eine gegebene Impulsfolgefrequenz ein gewöhnlicher Verstärker in einen Impulsverstärker umgewandelt werden kann, und zwar geschieht dies durch Einschaltung eines Scheinwiderstandes, der sich in gewisser Hinsicht wie ein Filterglied verhält.

Es wird eine Methode gezeigt, um diesen Scheinwiderstand zu berechnen und auszulegen.

Summary. This paper intends to show, how a common amplifier may be converted into a pulse-amplifier for a given frequency of impulses. This is done by the insertion of an impedance, which works somewhat like a filtersection.

A way is given for computing this impedance.

Résumé. L'auteur fait voir comment on peut transformer un amplificateur ordinaire dans un amplificateur d'impulsions pour une fréquence donnée d'impulsions. Ceci se fait par l'insertion d'une impédance qui, dans un certain sens, fait l'effet d'un filtre d'intersection.

Ensuite une méthode est indiquée comment calculer et dimensionner cette impédance.

Entzerrung eines Impulsverstärkers.

Impulse, die in einem festgelegten Takt — der Impulsfolgefrequenz — gesendet werden, ergeben bei der Fourier-Zerlegung ein ziemlich armes Spektrum, nämlich nur die Grundwelle ω_1 und ihre Vielfachen

$$\omega_n = n \cdot \omega_1. \quad (1)$$

Zur Übertragung des Tastverhältnisses v genügt es nun bei fester Impulsfolgefrequenz, alle Wellen

$$\omega_n \leq \frac{1}{v} \omega_1, \quad (1')$$

$$n \leq \frac{1}{v} \leq N \quad (1'')$$

verzerrungsfrei zu übertragen.

Ähnliche Beschränkungen wie (1'') gelten auch für andere vom Impuls etwa geforderte Eigenschaften. Liegt die Impulsfolgefrequenz von Anfang an fest, und das soll in dieser Arbeit angenommen werden, so muß eine endliche Zahl von Frequenzen verzerrungsfrei übertragen werden. Das läßt sich aber mit einem Verstärker und endlich vielen Entzerrungselementen sicher erreichen.

Der oben skizzierte Gedankengang wird in der vorliegenden Arbeit folgendermaßen realisiert: Der Verstärker wird in zwei Stufen aufgeteilt und die Entzerrungselemente werden zu einem Zweipol vereinigt parallel zum Gittereingang der zweiten Stufe geschaltet. Die Arbeit zerfällt dann in zwei Teile:

1. Angabe der Bedingungen, der die Ortskurve (Frequenzgang) des Zweipols genügen muß; dabei werden als gegeben betrachtet:

Die Impulsfolgefrequenz ω_1 ;

das Tastverhältnis v (oder sinngemäß N);

die Vierpoldaten der beiden Verstärkerstufen, und zwar speziell vom ersten Verstärker die zweite Zeile seiner Leitwertmatrix:

$\mathcal{Y}_{21}$... Kernleitwert vorwärts,

$\mathcal{Y}_{22}$... minus Kurzschlußleitwert;

und vom zweiten Verstärker, bei Abschluß mit dem — gleichfalls festgelegten — Arbeitswiderstand:

$\ddot{u}_2$... Spannungsübersetzung.

2. Exakte oder angenäherte Realisierung der oben aufgestellten Bedingungen durch Zusammenschaltung von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten.

1.

Zunächst einige Bezeichnungen: Das ankommende Zeichen hätte die Fourierkoeffizienten a_n :

$$U(t) = \Re \sum a_n e^{i\omega_n t}. \quad (2)$$

Die gleichen Größen, mit einem Strich versehen, bezeichnen das theoretisch unverzerrt ausgehende Zeichen:

$$U'(t) = \Re \sum a_n' e^{i\omega_n t}. \quad (2')$$

Ebenso bezeichnen zwei Striche das tatsächlich ausgehende Zeichen:

$$U''(t) = \Re \sum a_n'' e^{i\omega_n t}. \quad (2'')$$

Weiter bedeuten $\ddot{u}_1$ und $\ddot{u}_2$ die Spannungsübersetzungen der beiden Verstärkerstufen.

Dann gilt:

$$a'' = \ddot{u}_1 \ddot{u}_2 a. \quad (3)$$

$\ddot{u}_2$ liegt fest, $\ddot{u}_1$ enthält jedoch als Parameter den Leitwert $\mathfrak{G}$ des Entzerrungsgliedes:

Man dividiert die zweite Zeile der Leitwertmatrix:

$$i_a = \mathfrak{Y}_{21} u_e + \mathfrak{Y}_{22} u_a \quad (4)$$

durch u_a und setzt $\frac{u_a}{u_e} = \ddot{u}_1$ und $\frac{i_a}{u_a} = \mathfrak{G}$, so erhält man

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\ddot{u}_1} \mathfrak{Y}_{21} + \mathfrak{Y}_{22} \quad (5)$$

und

$$\ddot{u}_1 = \frac{\mathfrak{Y}_{21}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{Y}_{22}}. \quad (5')$$

Von $U'(t)$ wird verlangt, daß das ursprüngliche Zeichen $U(t)$ unverzerrt reproduziert werde. Also

$$U'(t) = e^{\beta} \cdot U(t - \tau_L). \quad (6)$$

Die Konstanten β und τ_L sind positiv, sonst frei wählbar. Aus (6) folgt mit

$$\Phi = \omega_1 \tau_L, \quad (7)$$

$$a_n' = e^{\beta - i n \Phi} a_n. \quad (6')$$

Für den ersten Teil der Aufgabe wird gefordert

$$a' = a'' \quad (8)$$

für alle ganzzahligen $n \leq N$.

Im zweiten Teil wird (8) ersetzt werden durch

$$\frac{\sum_n |a' - a''|^2}{\sum_n |a'|^2} \rightarrow \text{Min.} \quad (8')$$

(5), (6') und (3) in (8) eingesetzt ergibt:

$$\mathfrak{G}(n) = \mathfrak{Y}_{21} \ddot{u}_2 e^{-\beta + i n \Phi} + \mathfrak{Y}_{22}. \quad (9)$$

Im Gegensatz zur stets gültigen Gl. (5) braucht diese Gleichung nur für ganzzahliges $n \leq N$ erfüllt zu werden.

Damit ist die ursprüngliche Aufgabe darauf zurückgeführt, einen Zweipol zu konstruieren, dessen Leitwert für N Frequenzen vorgegeben ist.

Das ist unter Verwendung von $2N - 2$ Schaltelementen und geeigneter Wahl der beiden Parameter β und Φ tatsächlich immer möglich, solange der Realteil des Leitwertes größer als Null ist. Da nun

$$\Re \mathfrak{Y}_{22} < 0,$$

wäre eine Untersuchung nötig, ob es überhaupt Wertepaare der Parameter gibt, für die

$$\Re \mathfrak{G} > 0_{\text{alle } n}$$

wird.

Auf die allgemeine Diskussion dieser Frage kann hier verzichtet werden, da sich, solange

$$|\ddot{u}_1 \ddot{u}_2| > 1 \quad n \leq N$$

solche Wertepaare leicht aufweisen lassen. Für gewöhnlich genügt es schon,

$$\Phi = \tau_L = \beta = 0$$

zu setzen.

Tatsächlich erfolgt die Wahl der beiden Parameter dann so, daß zunächst aus (9) die Ortskurven für mehrere Wertepaare gezeichnet werden. Dann wird jene Kurve ausgesucht, die in den N Punkten möglichst wenig von der Ortskurve eines einfachen Zweipoles mit nur p Schaltelementen abweicht.

Es wäre nämlich ein unnötiger Aufwand an Schaltmitteln wie an Rechenarbeit, einen Zweipol mit genau der geforderten Ortskurve herzustellen, falls eine einfachere Schaltung die Kurve gut annähert und dadurch eine befriedigende Entzerrung liefert.

2.

Die so angenommenen Werte der Schaltelemente werden wohl kaum die günstigsten sein und man kann mit einer linearen Korrektur das Resultat noch verbessern.

Die nun folgende umständliche Korrektur der angenommenen Werte wird nur nötig, wenn die Verzerrungen nach Einschalten des Zweipols nicht im gewünschten Maß zurückgehen. Die Abweichungen des Leitwertes des Zweipols vom in (9) geforderten Sollwert sind — wie man bei Betrachten der Gl. (3) und (5') erkennt — für Verzerrungen des ausgehenden Signals $U''(t)$ verantwortlich. Diese müssen jedoch nicht nur von der unexakten Annahme von $\mathfrak{G}$ herrühren, es können sich auch nicht-lineare Verzerrungen oder Fehler des ankommenden Signals auswirken. Ferner können sich scheinbare Verzerrungen bei unrichtiger Wahl der Parameter ergeben. Für die weitere Rechnung ist es an sich gleichgültig, wodurch die Verzerrung entsteht, es genügt, ihren Wert zu kennen.

Die Korrektur der Annahmen für die Schaltelemente erfolgt nun aus der Forderung heraus, daß der Effektivwert der (additiv gedachten) Verzerrung im Verhältnis zum Effektivwert des Signals ein Minimum sein möge. Das ist aber der Inhalt der Bedingung (8').

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird nötigenfalls unter Verzicht auf Anschaulichkeit ein leistungsfähiger Formalismus (Ausgleichsrechnung) verwendet. Man setzt zur Abkürzung:

$$r = 1 - \frac{a'}{a''} = \frac{a'' - a'}{a'}. \quad (10)$$

$r \dots$ relative Verzerrung.

Damit geht (8') nach einigen Umformungen und Multiplikation mit $\sum^n |a_n|^2 = \text{konst.}$ über in

$$\alpha = \sum_1^N |a_n|^2 |r(n)|^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (8'')$$

Die relative Verzerrung ist von der Zeichenform unabhängig, solange nichtlineare Verzerrungen vernachlässigt werden können. Man erhält nämlich aus (3), (5') und (6') in (10) eingesetzt:

$$r = 1 - \frac{e^{\beta - i n \Phi}}{\ddot{u}_1 \ddot{u}_2} = 1 - \frac{\mathfrak{G} - \mathfrak{Y}_{22}}{\mathfrak{Y}_{21} \ddot{u}_2} e^{\beta - i n \Phi}. \quad (10')$$

Dieser Ausdruck ist, abgesehen von den bereits festliegenden Größen $\ddot{u}_2$, $\mathfrak{Y}_{21}$ und $\mathfrak{Y}_{22}$, abhängig von den p Schaltelementen des Zweipols und den zwei Parametern.

Die Forderung (8') wird erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen von (8'') nach jenen $(p + 2)$ Variablen verschwinden.

Zunächst wird zur einheitlichen Bezeichnung (11), (11') und (11'') eingeführt; das heißt, man differenziert nicht mehr nach dem Wert des Schaltelementes, sondern nach seiner prozentuellen Veränderung, außerdem ist es vorteilhaft, daß die neuen Unbekannten dimensionslos, klein und vor allem reell sind:

$$\mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_{\mu 0} (1 \pm x_\mu). \quad (11)$$

$\mu = 1, 2 \dots p.$

Dabei gilt das negative Zeichen, wenn $\mathfrak{Z}_\mu$ den Widerstand, jedoch das positive, wenn es den Leitwert des μ -ten Schaltelementes bedeutet. Der Index 0 kennzeichne den in erster Näherung ermittelten Wert.

Ferner sei

$$\beta = \beta_0 + x_{p+1}, \quad (11')$$

$$\Phi = \Phi_0 - x_{p+2}. \quad (11'')$$

Vernachlässigt man nun die Glieder höherer Ordnung in x , was bei Vorliegen einer brauchbaren Annäherung sicher erlaubt ist, so kann man setzen:

$$r = r_0 - \sum_1^{p+2} x_\lambda r_\lambda. \quad (12)$$

Dabei ist

$$r_0 = r|_{x_1 = x_2 = \dots = x_{p+2} = 0}$$

die für die erste Näherung festgestellte relative Verzerrung. Man könnte sie aus (10') rechnen; genauer ist es jedoch, die tatsächlich auftretenden Verzerrungen zu messen.

Die x sind hier Unbekannte, die aus der Forderung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_\lambda} = 0 \quad (13)$$

$$\lambda = 1, 2 \dots (p + 2)$$

zu berechnen sind.

Für die Ausdrücke

$$r_\lambda = - \frac{\partial r}{\partial x_\lambda}$$

erhält man schließlich nach einigen kleineren Vernachlässigungen durch Differenzieren von (10')

$$r_\mu = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{21} \ddot{u}_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\mu} \cdot e^{\beta - i n \Phi}, \quad (14)$$

$\mu = 1, 2 \dots p$

$$\left. \begin{aligned} r_{p+1} &= 1 - r \doteq 1, \\ r_{p+2} &= i \cdot n \cdot r_{p+1} \doteq i n. \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Verwendet man noch die im Anhang abgeleitete Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\mu} = \frac{\mathfrak{R}_\mu}{u_g^2} \quad (16)$$

wobei $\frac{\mathfrak{N}_\mu}{u_g^2}$ die — auf die an den Klemmen von $\mathfrak{G}$ herrschende Spannung bezogene — Leistung am μ -ten Schaltelement bedeutet, so erhält man

$$r_\mu = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{21} \ddot{u}_2} \cdot \frac{\mathfrak{N}_\mu}{u_g^2} \cdot e^{\beta - i n \Phi}. \quad (14')$$

Nun zur Bestimmung der α . Es sei zur Abkürzung

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \sum_n^N |a_n|^2 (r_\lambda \cdot \bar{r}_\mu + r_\mu \cdot \bar{r}_\lambda) = \alpha_{\mu\lambda}. \quad (17)$$

Die Querstriche bezeichnen, wie üblich, die konjugiert komplexen Werte.

Zur numerischen Berechnung von $\alpha_{\lambda\mu}$ bildet man vorteilhaft

$$A_n^2 = \frac{|a_n|^2}{|\ddot{u}_2|^2 |\mathfrak{Y}_{21}|^2}, \quad (18)$$

$$\bar{s}_0 = A_n \ddot{u}_2 \mathfrak{Y}_{21} r_0 \cdot e^{i n \Phi}, \quad (19)$$

$$\bar{s}_\lambda = A_n \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\lambda} \cdot e^\beta = A_n \frac{\mathfrak{N}_\lambda}{u_g^2} \cdot e^\beta, \quad (20)$$

$$\lambda = 1, 2 \dots p,$$

$$\bar{s}_{p+1} = A_n \ddot{u}_2 \mathfrak{Y}_{21} \cdot e^{i n \Phi}, \quad (21)$$

$$\bar{s}_{p+2} = i n A_n \ddot{u}_2 \mathfrak{Y}_{21} \cdot e^{i n \Phi} \quad (21')$$

spaltet diese Ausdrücke in ihre Real- und Imaginärteile und setzt:

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sum_n^N (\operatorname{Re} \bar{s}_\lambda \operatorname{Re} \bar{s}_\mu + \operatorname{Im} \bar{s}_\lambda \operatorname{Im} \bar{s}_\mu). \quad (17')$$

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht von der Identität der Ausdrücke (17) und (17').

Nun ist (8'') und (12):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sum_1^N |a_n|^2 r \bar{r} = \\ &= \sum_1^N |a_n|^2 (r_0 - \sum_1^{p+2} x_\lambda r_\lambda) (\bar{r}_0 - \sum_1^{p+2} x_\mu \bar{r}_\mu) = \\ &= \sum_1^N |a_n|^2 r_0 \bar{r}_0 - \\ &\quad - \sum_1^N |a_n|^2 \sum_1^{p+2} x_\lambda (\bar{r}_0 r_\lambda + r_0 \bar{r}_\lambda) + \\ &\quad + \sum_1^N |a_n|^2 \sum_{\lambda, \mu=1}^{p+2} x_\lambda x_\mu r_\lambda \bar{r}_\mu = \\ &= \alpha_{00} - 2 \sum_1^{p+2} x_\lambda \alpha_{0\lambda} + \sum_{\lambda, \mu=1}^{p+2} x_\lambda x_\mu \alpha_{\lambda\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die partiellen Ableitungen des Ausdrucks (22) ergeben dann, gleich Null gesetzt:

$$\sum_1^{p+2} \lambda \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda = \alpha_{0\mu}, \quad \mu = 1, 2 \dots (p+2) \quad (23)$$

Die Determinante $|\alpha_{\lambda\mu}|$ ist das Quadrat der Rechteckmatrix $\{\hat{s}_\lambda\}$

$$\lambda, \mu = 1, 2 \dots (p+2)$$

Sie kann also nur verschwinden, wenn die $\hat{s}_\lambda$ linear abhängig sind. Dann besteht aber zwischen den $\alpha_{0\lambda}$ die gleiche Abhängigkeit, es können also in (23) keine widersprechenden Gleichungen auftreten.

Daher ist das System (23) lösbar. Am besten rändere man die Matrix (24), wobei darauf zu achten ist, daß die Symmetrie nicht zerstört wird.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1, p+2} & \alpha_{01} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2, p+2} & \alpha_{02} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1, p+2} & \alpha_{2, p+2} & \dots & \alpha_{p+2, p+2} & \alpha_{0, p+2} \\ \alpha_{01} & \alpha_{02} & \dots & \alpha_{0, p+2} & \alpha_{00} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Die x_λ , die als Lösung des Gleichungssystems (23) erhalten werden, müssen nur noch in die Gl. (11) eingesetzt werden, womit die korrigierten Werte der Schaltelemente des Entzerrungszweipols berechnet sind.

Die letzte Zeile der Matrix (24) wird vorteilhaft zur Kontrolle hinzugefügt, da sie nach erfolgter Ränderung

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \alpha$$

lautet und $\alpha < \alpha_{00}$ eine gewisse Kontrolle auf Rechenfehler ermöglicht. Es folgt nämlich aus (22)

$$\alpha = \alpha_{00} - \sum_1^{p+2} x_\lambda \alpha_{0\lambda} - \left\{ \sum_1^{p+2} x_\lambda \left(\alpha_{0\lambda} - \sum_1^{p+2} x_\mu \alpha_{\lambda\mu} \right) \right\}.$$

Der Klammerausdruck verschwindet wegen (23) und es bleibt:

$$\alpha = \alpha_{00} - \sum_1^{p+2} x_\lambda \alpha_{0\lambda}. \quad (25)$$

Das ist aber genau der Ausdruck, der nach dem Rändern überbleibt.

Zum Schluß noch die Bemerkung, daß die umfangreiche numerische Rechnung verkürzt wird, wenn $\mathfrak{G}_0$ aus parallel geschalteten (stark gedämpften) Serienkreisen aufgebaut wird. Ist nämlich

$$r_\mu = i n r_\lambda,$$

so folgt

$$\alpha_{\lambda\mu} = 0.$$

Aus dem gleichen Grund ist auch stets

$$\alpha_{p+1, p+2} = 0.$$

Die Durchführung der Bemessung.

Für Teil 1 sind nötig Messungen der Größen $\mathfrak{Y}_{21}$ und $\mathfrak{Y}_{22}$ der Leitwertmatrix des ersten Verstärkers und der Spannungsübertragung $\ddot{u}_2$ des mit dem Arbeitswiderstand abgeschlossenen zweiten Verstärkers.

Die Werte sind für alle Frequenzen (1), (1'') nach Betrag und Winkel zu bestimmen. Gl. (9) schreibt dann nach geeigneter Verfügung über die Parameter β und Φ den Frequenzgang des Leitwertes $\mathfrak{G}$ vor.

β und Φ werden so gewählt, daß dieser Frequenzgang durch einen einfachen Zweipol $\mathfrak{G}_0$ möglichst gut angenähert wird.

Bleibt nach dieser Annäherung noch eine störende Verzerrung über, so wird in Teil 2 ein Weg angegeben, durch prozentuelle Änderung der Schaltelemente von $\mathfrak{G}_0$ den Effektivwert dieser Verzerrung weiter herabzudrücken.

Man geht folgendermaßen vor: Die Verzerrung ist zu messen und aus ihren Fourier-Koeffizienten die relative Verzerrung r_0 zu rechnen: (10), vgl. (2') und (2'').

Ferner sind rechnerisch die Größen $\frac{\mathfrak{N}_\mu}{u_g^2}$ zu bestimmen.

u_g ... Spannung am $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{N}_\mu$... Leistung am μ -ten Schaltelement, in der Phase auf u bezogen.

Zur Kontrolle:

$$\sum_1^P \mu \mathfrak{s}_\mu = \mathfrak{G} \cdot A_n \cdot e^\beta.$$

Schließlich müssen noch die Fourier-Koeffizienten (2) des ankommenden Signals gegeben sein.

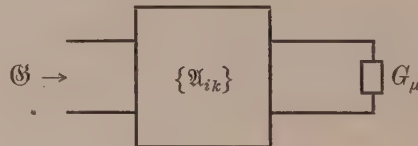
Falls die Entzerrung für verschieden geformte Signale — jedoch mit gleicher Impulsfolgefrequenz! — bemessen werden soll, genügt ein Mittelwert oder eine ähnlich vereinfachende Annahme über den Ausdruck (18).

Mit den so erhaltenen Werten setzt man in den Formalismus der Gl. (17') bis (23) ein und berechnet die Werte x_μ ($\mu = 1, 2 \dots p$), die die prozentuellen Änderungen (11) angeben, die an den Schaltelementen von $\mathfrak{G}_0$ vorgenommen werden müssen, um die günstigsten Werte der Schaltelemente zu erhalten.

Anhang.

Nachweis der Gl. (16):

Man greift das μ -te Schaltelement von $\mathfrak{G}$ heraus und betrachtet den Rest als Vierpol:



Dann setzt man

$$\mathfrak{G} = \frac{i}{u_g}, \quad G_\mu = \frac{i_\mu}{u_\mu}.$$

Da nur tote Schaltelemente auftreten, ist $|\mathfrak{N}_{ik}| = 1$. Nun bildet man

$$u_g^2 d\left(\frac{i}{u_g}\right) = \begin{vmatrix} di & du \\ i & u \end{vmatrix} =$$

nach Einsetzen der $\mathfrak{N}$ -Matrix

$$= \begin{vmatrix} di_\mu & du_\mu \\ i_\mu & u_\mu \end{vmatrix} = u_\mu^2 d\left(\frac{i_\mu}{u_\mu}\right)$$

und wegen (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_\mu} = G_\mu \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial G_\mu} = \frac{G_\mu u_\mu^2}{u_g^2} \quad (16)$$

was zu beweisen war.

Der Nachweis für den Fall, daß $\mathfrak{B}_A$ ein Widerstand sei, erfolgt — bis auf zwei Zeichenwechsel, die sich im Resultat aufheben — analog.

(Eingegangen am 9. Mai 1950.)

On the So-Called Principle of Least Work Method.

By M. Z. Krzywoblocki, Univ. of Illinois, Urbana.

With 5 Figures.

Zusammenfassung. Bei der Anwendung des sogenannten Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall sind die statisch unbestimmten Größen Einzelkräfte oder Momente. Dann liefert das Verschwinden der ersten Ableitungen der in den Lasten und in den Überzähligen ausgedrückten Formänderungsarbeit nach den Überzähligen die notwendige Anzahl von Bestimmungsgleichungen.

Der zweite Fall tritt ein, wenn stetig verteilte Spannungen vorliegen. Drückt man die Spannungskomponenten als Funktionen der Koordinaten mit unbestimmten, zunächst frei wählbaren Koeffizienten aus und bildet wieder die Formänderungsarbeit, so kann man diese Koeffizienten durch Nullsetzen der ersten Ableitungen der Formänderungsarbeit nach den Koeffizienten bestimmen. Dieses Verfahren muß aber nicht immer zu einer brauchbaren Lösung führen, wie an einer Anzahl von Beispielen gezeigt wird.

Der Verfasser schlägt daher ein „verallgemeinertes Castiglianosches Prinzip“ vor, welches für beide Fälle Gültigkeit hat.

Summary. When considering the application of the so called theorem of least work method two main cases must be distinguished. In the first case there exist only concentrated, separate forces in the members of the structure. Then the equating to zero of the first partial derivatives of the total strain energy of the system with respect to the redundant forces gives the necessary system of equations for these forces.

The second case occurs, when in the system there are continuously distributed stresses. If the stress components are expressed as certain functions of the coordinates and of constant coefficients undetermined for the time being, then the equating to zero of the first partial derivatives of the total strain energy with respect to the unknown coefficients may not lead to a correct solution of the problem. This is shown in applying the method to some practical problems.

The author therefore proposes a “generalized principle of Castigliano” to cover both cases.

Résumé. Dans l'application du théorème dit du minimum de travail de déformation, deux cas sont à considérer:

Dans le premier cas les grandeurs statiquement indéterminées sont des forces isolées ou des moments. Les équations nécessaires à la détermination des coefficients s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées premières par rapport aux quantités surabondantes du travail de déformation exprimé en fonction des charges et des quantités surabondantes.

Le deuxième cas se présente, lorsqu'on se trouve en présence de tensions réparties de façon constante. Si l'on exprime les composantes de la tension en fonction des coordonnées avec des coefficients d'abord arbitraires et qu'on forme à nouveau l'expression du travail de déformation, on peut déterminer ces coefficients en égalant à zéro les dérivées premières par rapport à ces coefficients du travail de déformation. Mais il n'est pas toujours possible par ce procédé de parvenir à une solution utilisable, comme on le montrera sur un certain nombre d'exemples.

C'est pourquoi l'auteur propose un «Principe de Castigliano» généralisé, valable dans les deux cas.

Introduction.

The application of the principle of least work to the approximate solution of problems in the theory of elasticity, in which the redundant generalized forces in elastic systems are expressed as certain functions in terms of a chosen system of coordinates¹, has been known for a long time². The procedure of application of

¹ S. Timoshenko and D. H. Young: Theory of Structures. McGraw-Hill Company. 1945.

² In elastic systems like beams, frameworks, rings, etc., the redundant generalized forces are usually expressed not as functions of coordinates, but as pure numbers which are unknown at the beginning. The strain-energies due to these generalized forces can be expressed in a unique way. For example, strain energy in tension is equal to $V = \left(\frac{1}{2}\right) W^2 L/(EA)$; in a bent beam,

$V = \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^L M^2/(EI) dx$, etc. If one wants to express the continuously distributed stresses

by a function of coordinates in the assumed system of coordinates, theoretically, it is possible to choose infinitely many such functions.

this principle to the solution of problems in elastic system like beams, frameworks, rings, etc., has been given by some writers the name of the "method of least work". It applies to the solution of practical problems as follows³:

We derive the expression for the strain energy V of the given system as a function of the redundant forces and the redundant reactions $X, Y, Z \dots$ and then select these forces so as to make this strain energy a minimum:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \dots$$

Thus we obtain as many equations as there are redundant forces and redundant reactions.

Next, another application of the principle will be presented. Let the total potential energy, stored in a body, be expressed by stress components and the stress components by Airy's stress function, and let us assume that the stress-components or Airy's stress function are unknown. The usual procedure in this case is the following: 1. express the stress-components or Airy's stress function as certain functions of the coordinates in the chosen system of coordinates $[x(t), y(t), z(t), t]$, for example, and of constant coefficients undetermined for the time being. The chosen functions must fulfill all the boundary conditions. Various forms of these functions may be chosen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \psi_0 + a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots, & \psi_n &= \psi_n(x, y, z, t), \\ \Phi &= \Phi_0 + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \dots, & \Phi_n &= \Phi_n(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Power series and Fourier series are functions very often used. In the next step the total strain-energy of the body is calculated and formulated as a function of the undetermined coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. The equilibrium conditions are taken into account so as to present the constraining conditions for a minimum of a function (call them Λ).

The unknown coefficients a_n are determined from the set of linear equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_n} \iiint W dx dy dz + \lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial a_n} &= 0, & \Lambda &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_n} \iiint F \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \dots \right) dx dy dz + \lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial a_n} &= 0, & \Lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

where the total potential energy V , stored in the body, is equal to:

$$V = \iiint W dx dy dz = \iiint F \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \dots \right) dx dy dz.$$

The described application of the least work theorem is very widely used in the

³ See J. N. Goddier: Compression of Rectangular Blocks, and the Bending of Beams by Non-Linear Distribution of Bending Forces. Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. 54, 173 (1931). — Th. v. Kármán: Die mittragende Breite. Beiträge zur Technischen Mechanik. Festschrift August Föppl, S. 114—127. Berlin: Springer-Verlag. 1924. — A. Niles and J. S. Newell: Airplane Structure. New York: J. Wiley & Sons. 1943. — Th. Pöschl: Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bau-Ing. 17, Nr. 17/18, 160—164 (1936). — Th. Pöschl: Elementare Festigkeitslehre, S. 173. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — S. Timoshenko: The Approximate Solution of Two-Dimensional Problems in Elasticity. The London, Edinburgh and Dublin. Philos. Mag. 47, Series 6 (1905). — S. Timoshenko: Strength of Materials. New York: D. van Nostrand Company. — S. Timoshenko: Theory of Elasticity. Mc-Graw-Hill Company. 1934. — S. Timoshenko and J. M. Lessels: Applied Elasticity. Westinghouse Technical Night School Press. 1925. — S. Timoshenko and D. H. Young: Theory of Structures. Mc-Graw-Hill Company. 1945.

determination of continuously distributed stresses. Very often this application is seemingly justified by a statement that it is based on "Castigliano's theorem"⁴.

In the first case, when in the system considered there exist only concentrated, separate forces in the members of the structure, the total strain energy of the system is given by a quadratic form which is always a positive definite one; therefore, the extremum sought must be a minimum⁵. In this case the solution is given by equating to zero the first partial derivatives of the total strain energy with respect to the redundant forces. Pöschl calls this case "Castigliano's Principle"⁶.

In the second case, when in the system there are continuously distributed stresses, the total strain energy is expressed by single, double, or triple integral forms, and the equating to zero of the first partial derivatives of the total strain energy with respect to the unknown coefficients may not lead to a correct solution of the problem. It is no longer a problem of seeking an ordinary extremum of a function and one should apply the methods of the calculus of variations⁷. Strictly speaking, the use of the principles of calculus of variations to the solution of problems of this kind was recommended as far back as 1914 by Domke⁸.

It is possible to "generalize" Castigliano's Principle (in Pöschl's meaning) so that it will cover all the possible cases of concentrated forces as well as continuously distributed stresses. The author proposes the following "generalization": When applying Castigliano's theorem of least work to specific problems, we must be assured a priori that the redundant generalized forces or unknown stress distributions are expressed by functions among which there is one, and only one, function which gives a smaller value to the total strain-energy than any other gives, having first taken the given values on the boundary. Being assured that such a minimum exists, we present the total strain-energy as a function of the redundant generalized forces or unknown coefficients. Next we express in an analytical form the statement that

⁴ See for instance: J. appl. Mechan., Trans. A. S. M. E. 11, No. 4, Dec., A-235 to A-238 (1944); 13, No. 2, June, A-137 to A-147 (1946); 15, No. 1, March, 30 to 36 (1948); J. aeronaut. Sci. 12, 455 (1945). — J. N. Goddier: Compression of Rectangular Blocks, and the Bending of Beams by Non-Linear Distribution of Bending Forces. Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. 54, 173 (1931). — Th. v. Kármán: Die mittragende Breite. Beiträge zur Technischen Mechanik. Festschrift August Föppl, S. 114—127. Berlin: Springer-Verlag. 1924. — S. Timoshenko: The Approximate Solution of Two-Dimensional Problems in Elasticity. The London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. 47, Series 6 (1905). — S. Timoshenko: Strength of Materials. New York: D. van Nostrand Company. — S. Timoshenko: Theory of Elasticity. McGraw-Hill Company. 1934 etc.

⁵ Several textbooks S. Timoshenko: The Approximate Solution of Two-Dimensional Problems in Elasticity. The London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. 47, Series 6 (1905); S. Timoshenko: Strength of Materials. New York: D. van Nostrand Company; S. Timoshenko: Theory of Elasticity. McGraw-Hill Company, 1934; S. Timoshenko and J. M. Lessels: Applied Elasticity. Westinghouse Technical Night School Press, 1925, try to prove the existence of a minimum by pointing out that the second partial derivatives taken separately with respect to X , Y , Z , etc., are positive. This condition is necessary but not yet sufficient. The fact that the quadratic form is a positive definite is the only proof of existence of a minimum. Th. Pöschl: Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bau-Ing. 17, Nr. 17/18, 160—164 (1936). — Th. Pöschl: Elementare Festigkeitslehre, S. 173. Berlin: Springer-Verlag. 1936.

⁶ Th. Pöschl: Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bau-Ing. 17, Nr. 17/18, 160—164 (1936). — Th. Pöschl: Elementare Festigkeitslehre, S. 173. Berlin: Springer-Verlag. 1936.

⁷ R. Courant und D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I, S. 230. Berlin: Springer-Verlag. 1931. — Th. Pöschl: Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bau-Ing. 17, Nr. 17/18, 160—164 (1936). — Th. Pöschl: Elementare Festigkeitslehre, S. 173. Berlin: Springer-Verlag. 1936. — I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, p. 281. McGraw-Hill Company. 1946.

⁸ O. Domke: Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik. Z. Math. Phys., Mai, 174 (1914). — O. Domke: Discussion of the paper by Th. Pöschl. Bau-Ing. 17, Nr. 41/42, 459 (1936).

the total strain-energy has a stationary value, for small variations in the redundant forces, by equating to zero the first partial derivatives of the strain-energy with respect to each of the redundant forces or unknown coefficients. The last equations give us the values of the redundant forces or of the unknown coefficients.

The author would like to point out a complete analogy and even an identity of the above proposition with the form interpreting the Theorem of Minimum Potential Energy of a system. This must be true, since there exists a close relationship between the Theorem of Least Work and the Theorem of Minimum Potential Energy for structures in which the members obey a linear stress-strain law (Hooke's Law). This relationship has been shown by Williams in an elementary way⁹. As a concise statement it may be said according to Williams that, in applying the Theorem of Least Work to trusses, say, equilibrium is assumed at each node and the satisfaction of the equations obtained by differentiating the internal energy with respect to the unknown loads in the redundant members ensures compatibility of displacement; whereas, in applying the Theorem of Minimum Potential Energy, compatibility of displacement is assumed and the satisfaction of the equations obtained by differentiating the potential energy with respect to the displacements ensures equilibrium at each node.

The equivalence of the two variational forms may be easily shown by use of the transformation methods of the calculus of variations¹⁰. Courant recommends the application of Friedrichs' transformation in this case.

The exposition of the generalized Castigliano's principle, as presented above, makes self-evident not only the distinction between the two cases mentioned above (concentrated forces and continuously distributed stresses), but also justifies another procedure often met in literature as in the case of continuously distributed stresses. To obtain the solution one may assume a curve or a surface representing in a first approximation the distribution of stresses as a two-or-three-dimensional function of the coordinates in the given system. This choice may be made in several ways, the simplest being to base it upon the distribution from experimental tests. The chosen function possesses certain unknown coefficients which may be determined by the application of the theorem of minimum strain energy¹¹. Hence, before one applies the minimum strain energy principle, one is assured that among the chosen set of functions there is one which gives a lower value of the energy than do the others. This method may be considered to be approximate, but it is shorter.

The present paper consists of two parts. In the first part the so-called "least work method" is applied to the solution of stress distribution in a thin-walled reinforced box of a rectangular cross-section. This type of structure was chosen for the following reason: in the case of ribs of a finite stiffness there is a lack of tests on this type of construction. However, for the case of ribs (with a very great stiffness in their planes) which may be assumed to have an infinitely great stiffness, the stress distribution is very well-known. Because of lack of tests and a desire not to obscure the picture by long calculations of sets of linear equations of high order, the calculations for a box with ribs of a finite stiffness are limited to a box with one field only.

Several kinds of loading at the end of the box and various lengths of the structure were taken into account. All together nine examples were calculated. Following

⁹ D. Williams: The Relations between the Energy Theorems Applicable in Structural Theory. *Philos. Mag.* **26**, Series 7, November, 618 (1938).

¹⁰ R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. I, S. 230. Berlin: Springer-Verlag, 1931.

¹¹ As an example, let it be mentioned that this way was chosen by Reissner in his solutions of shear lag problem. See E. Reissner: Least Work Solutions of Shear Lag Problems. *J. aeronaut. Sci.* **8**, No. 7, May, 284 (1941).

the principle that if a statement is in general valid up to the limit it is also valid in the limit, two extreme cases were taken into account; namely, one-field box with a rib of an infinitely great stiffness and a two-field box with all the ribs of an infinitely great stiffness. Based on the above principle, the conclusion derived for the last cases considered will be also valid for the general cases. Thus, by applying the method to some specific cases, it can be seen if the method will give approximately good results.

In the second part of the paper, the theoretical considerations will be given to justify the statements presented in the introduction. A few remarks on the relation to a previous author's note close the paper.

I. Application of the So-Called Principle of Least Work Method.

1. The Rectangular Box.

Assume a cantilever box of rectangular cross section loaded at the free end. The box is made of a thin metal sheet and is reinforced in the transverse direction with m frames or ribs. Each rib has a constant cross section but the cross sections of ribs in general may vary. In the direction of its span the box possesses longitudinal reinforcing elements referred to as stringers. In accordance with the general practical methods in aircraft stress analysis, the part of the cross-sectional area of the covering sheet which is supposed to be effective in taking the normal stresses is added to the cross-sectional area of the stringers. The stringers and the effective width of the covering sheet form the total cross-sectional area carrying normal stresses. Concerning the shear resistance, it is assumed that the sheet carries shear alone. This assumption simplifies the problem and is close to the results obtained in practice. The effective width of the sheet is assumed to be the same on both the tension and compression sides. The cross section areas of all the stringers are assumed to be equal to each other and constant through all panels. The stringers are spaced evenly along each of the two longer sides of the rectangular cross section of the box. Thus the construction is highly uniform and symmetrical. This permits the assumption that the stringers are distributed uniformly along the longer sides of the rectangle. The accuracy of the stress analysis is usually not affected by this assumption. Thus one may imagine that the stringers and the effective width of the covering sheet form a sheet of fictitious constant thickness t_e , distributed uniformly along the longer sides of the rectangle, which carries the normal stresses. The vertical webs of the box are supposed to carry shear stresses only and no normal stresses. This assumption is also in agreement with the general practice met in aircraft stress analysis.

Some additional assumptions have to be made concerning the stringers and the ribs. The stringers are considered to offer negligibly small resistance to bending, i. e., they resist only tension or compression. This may be true enough in the case of a wing possessing very strong, stiff ribs. The ribs are assumed to possess a finite rigidity in bending in their planes, but a vanishing rigidity in bending out of their planes as well as in torsion. It is assumed that the normal stresses are distributed uniformly across the thickness of the fictitious sheet carrying the normal stresses, and the shear stresses are distributed uniformly across the thickness of the covering sheet. The validity of Hooke's law is also assumed which leads to the numerical equality of the strain energy, and the elastic energy of the considered elastic structure.

2. Shear Flow.

From the conditions of a membrane equilibrium, it is obvious that the shear flow will be constant in the vertical webs along the entire span of the box¹². Also the

¹² In case the load is distributed along the span and acts on several ribs, the shear flow in the vertical webs will vary.

shear stress will be constant in each panel bounded by two adjacent ribs and two adjacent stringers. Because of the last condition and because of the assumption of an infinite number of stringers and a finite number of ribs in the considered problem, the shear stress will be constant between two adjacent ribs but will vary along the longer sides of the box. Because of symmetry of both the structure and loading, only one half of the structure will be taken into consideration in the first part of the paper.

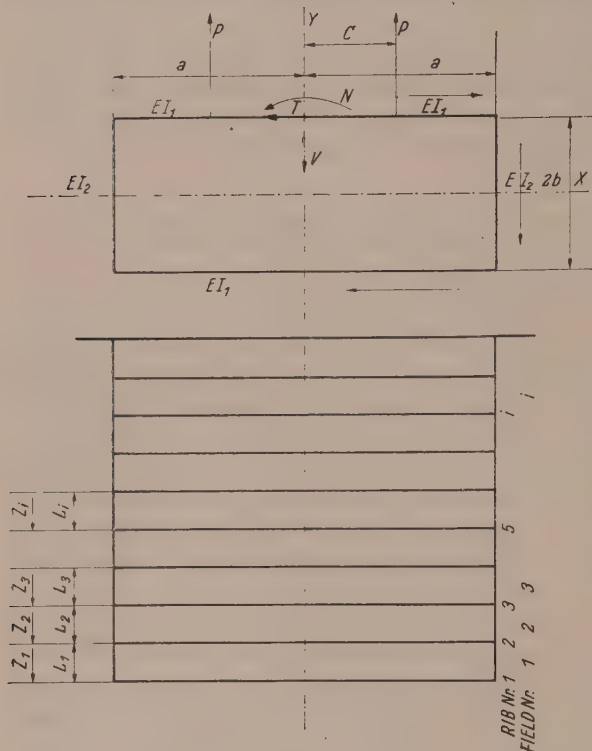


Fig. 1.

A new system of coordinates must be introduced. Let it be assumed for the positive value of x

$z = x$ for the upper part of the box,

$z = 2a - x$, $x = 2a - z$, for the lower part of the box.

In other words, z represents the running coordinate along the circumference composed of two longer sides of the rectangle, omitting the vertical web. The shear flow q_i in the i -th field will be given by:

$$q_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \sin\left(\frac{n\pi z}{2a}\right). \quad (1)$$

It may be shown that the sine series satisfies the requirements of the symmetry if the shear flow is taken positive when it points in the direction of increasing z .

3. The First Rib.

The requirements of equilibrium of moments and forces in the x -direction are satisfied by each term of the series (1) with $i = 1$ if the period from 0 to $(+2a)$ is taken into account. The average shear flow in the web is equal to:

$$q_{1w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = a_{11} - a_{13} + a_{15} - a_{17} + \dots \quad (2)$$

Three kinds of loading will be considered: concentrated load (CL), the uniformly distributed load on the upper side (US), and the uniformly distributed load on both the upper and lower sides (BS). The condition of equilibrium of forces in the y -direction supplies¹³:

$$P = pa = 2p_1a = 2bq_{1w} = 2b(a_{11} - a_{13} + a_{15} - \dots). \quad (3)$$

From the condition of the uniform average shear flow in the web it follows that:

$$(a_{i1} - a_{i3} + a_{i5} - a_{i7} + \dots) = (a_{i-1,1} - a_{i-1,3} + a_{i-1,5} - \dots) = (a_{i+1,1} - a_{i+1,3} + \dots). \quad (4)$$

¹³ The symbols denote: P the concentrated load on one half of the structure, p the loading per unit length in the case when the load is uniformly distributed on the upper side, p_1 the loading per unit length in the case when the load is uniformly distributed on both the upper and lower sides.

Consider the first rib as a frame (Fig. 1). If the frame is assumed to be cut at $(0, b)$, the unknown moment N and the unknown forces T and V must be applied in the cut. Of course, $V = 0$, because of the symmetry.

The total bending moment will be the sum of all the moments due to N , T , q_1 and P :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= N, & 0 \leq \beta \leq c, & y = b, \\ M_1 &= N + P(c - \beta), & c \leq \beta \leq a, & y = b, \\ M_1 &= N + A(b - y) + P(c - a), & \beta = a, & (-b) < y < b, \\ M_1 &= N + 2bA + P(c - a), & a \leq \beta \leq 2a, & y = (-b), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$A = T - 2a\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{1n}}{n} \right) [1 - \cos(n\pi/2)].$$

The total strain energy stored in one-half of the rib with the assumption that the strain energies due to tension and shear are negligibly small and may be omitted, is given by the formula:

$$U_{r1} = \frac{1}{2} \int_0^a (EI_1)^{-1} M_1^2 d\beta + \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} (EI_2)^{-1} M_1^2 dy + \frac{1}{2} \int_a^{2a} (EI_1)^{-1} M_1^2 d\beta. \quad (6)$$

Application of Castigliano's theorem leads to:

$$\frac{\partial U_{r1}}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial U_{r1}}{\partial T} = 0. \quad (7)$$

In the considered case the value $k = \left(\frac{I_1}{I_2} \right) = 1$ was assumed. After integration and transformation one obtains:

$$\begin{aligned} N &= P(A_1 + A_2 - c), \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} 2a(n\pi)^{-1} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] + PA_1 b^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_1 = 3(c^2 - a^2)[4(3a + b)]^{-1}, \quad A_2 = (3a^2 + c^2 + 4ab)[4(a + b)]^{-1}.$$

Similar equations may be found for two other types of loading. New symbols will be introduced and all formulas will be transformed into dimensionless forms:

$$c/a = h, \quad b/a = r, \quad \beta/a = \chi, \quad y/a = \eta, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(CL)} \quad M_1 (Pa)^{-1} &= B_1 + B_2 - h, & 0 \leq \chi \leq h, & \eta = r, \\ &= B_1 + B_2 - \chi, & h < \chi < 1, & \eta = r, \\ &= B_1 \eta r^{-1} + B_2 - 1, & \chi = 1, & (-r) < \eta < r, \\ &= -B_1 + B_2 - 1, & 1 \leq \chi \leq 2, & \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$B_1 = 3(h^2 - 1)[4(3 + r)]^{-1}, \quad B_2 = (3 + h^2 + 4r)[4(1 + r)]^{-1},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(US)} \quad M_1 (pa^2)^{-1} &= C_1 - C_2 - \left(\frac{1}{2}\right)\chi^2, & 0 \leq \chi \leq 1, & \eta = r, \\ &= C_1 - C_2 \eta r^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right), & \chi = 1, & (-r) < \eta < r, \\ &= C_1 + C_2 - \left(\frac{1}{2}\right), & 1 \leq \chi \leq 2, & \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$C_1 = (2 + 3r)[6(1 + r)]^{-1}, \quad C_2 = [2(3 + r)]^{-1},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(BS)} \quad M_1 (2p_1 a^2)^{-1} &= \left(\frac{1}{4}\right) - D_1 - \left(\frac{1}{4}\right)\chi^2, & 0 \leq \chi \leq 1, & \eta = r, \\ &= -D_1 \eta r^{-1}, & \chi = 1, & (-r) < \eta < r, \\ &= \left(\frac{3}{4}\right) + D_1 + \left(\frac{1}{4}\right)\chi^2 - \chi, & 1 \leq \chi \leq 2, & \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$D_1 = C_2.$$

4. Calculation of Stresses in Other Ribs and Stringers.

The loading acting upon the i -th rib will consist only of the difference in the shear flows of two adjacent i -th and $(i-1)$ -th fields. The sign convention used here is the same as above. Thus the total bending moment in the $(i+1)$ -th rib is (in dimensionless form) equal to:

$$\left. \begin{aligned} M_{(i+1)} (P a)^{-1} &= 2 (\eta - r) \pi^{-1} S_2, & \chi &= 1, & (-r) < \eta < r, \\ &= -4 r \pi^{-1} S_2, & 1 &\leq \chi \leq 2, & \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a (P n)^{-1} [a_{(i+1)n} - a_{in}] \left[1 - \cos \left(\frac{n \pi}{2} \right) \right].$$

The normal stresses in the stringers can be calculated from the expression:

$$t_e \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) + t \left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \partial \sigma = -t_e^{-1} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} \right) dz. \quad (14)$$

Thus the normal stress in the point of the coordinate z is equal to:

$$\sigma = -t_e^{-1} \int_0^z \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} \right) dz + f(x, y). \quad (15)$$

For $z = 0$ the normal stress is equal to zero. Assumptions that there does not exist any axial load in the first rib and that the ribs are infinitely weak in bending out of their plane lead to the condition $f(x, y) = 0$. For a point located in the p -th field the normal stress is equal to:

$$\sigma_p = -t_e^{-1} \left[\sum_{i=0}^{p-1} \int_0^{Li} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi} \right) dz_i + \int_0^{z_p} \left(\frac{\partial q_p}{\partial \xi} \right) dz_p \right]. \quad (16)$$

z_i and z_p denote the distances measured in the direction of the axis of the box from the i -th and p -th rib, respectively, q_i denotes the value of the shear flow in the (i) -th field, q_p the shear flow in the (p) -th field.

5. Calculation of the Fourier Coefficients.

The coefficients a_{in} are determined by equating to zero the derivatives of the total strain energy stored in the whole structure taken with respect to the coefficients. Since all the equilibrium conditions have to be taken into account, the problem of calculating the Fourier coefficients is the problem of "a minimum of a function" with constraints. As the constraining conditions eqs. (3) and (4) are to be taken into account. Using for these equations the symbols Φ_n and corresponding small letters for the Lagrangean multipliers, one can calculate the Fourier coefficients from the set of equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_t}{\partial a_{iw}} + \varphi_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_{iw}} \right) + \varphi_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_{iw}} \right) &= 0, \\ \Phi_1 &= 0, \quad \Phi_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

At first the strain energy stored in the ribs will be considered:

$$U_{rt} = \sum_{i=1}^m \left[(E I_i)^{-1} \int_0^{2a} M_i^2 d\xi + (E I_i)^{-1} \int_{-b}^{+b} M_i^2 dy \right]. \quad (18)$$

In order to differentiate U_{rt} with respect to a_{1w} one has to take into account only the first two ribs. Here w is a positive integer. After the necessary calculations and transformations, one obtains for each considered case the following dimensionless formulas:

$$a^{-2} \left(\frac{\partial U_{r1}}{\partial a_{1w}} \right) = 4 P a^2 r (E I_1)^{-1} \sin \left(\frac{w \pi}{2} \right) \sum_{i=1}^4 F_i, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{(CL)} \quad & \left. \begin{aligned} F_1 &= h (\alpha + \beta - h)^2, & 0 \leq \chi \leq h, \quad \eta = r, \\ F_2 &= \left(\frac{1}{3} \right) [(\alpha + \beta - h)^3 - (\alpha + \beta - 1)^3], & h \leq \chi \leq 1, \quad \eta = r, \\ F_3 &= \gamma [(\alpha + \beta - 1)^3 - (\beta - \alpha - 1)^3], & \chi = 1, \quad (-r) < \eta < r, \\ F_4 &= (\beta - \alpha - 1)^2, & 1 \leq \chi \leq 2, \quad \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (20) \\ & \alpha = 3 (h^2 - 1) [4 (3 + r)]^{-1}, \quad \beta = (3 + h^2 + 4r) [4 (1 + r)]^{-1}, \\ & \gamma = 4 r (r + 3) [9 (h^2 - 1)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(US)} \quad & \left. \begin{aligned} F_1 + F_2 &= (\alpha_1 - \beta_1)^2 - \left(\frac{1}{3} \right) [\alpha_1 - \beta_1 + (1/20)], & 0 \leq \chi \leq 1, \quad \eta = r, \\ F_3 &= \gamma_1 \left\{ \left[\alpha_1 - \beta_1 - \left(\frac{1}{2} \right) \right]^3 - \left[\alpha_1 + \beta_1 - \left(\frac{1}{2} \right) \right]^3 \right\}, & \chi = 1, \quad (-r) < \eta < r, \\ F_4 &= \left[\alpha_1 + \beta_1 - \left(\frac{1}{2} \right) \right]^2, & 1 \leq \chi \leq 2, \quad \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (21) \\ & \alpha_1 = (2 + 3r) [6 (1 + r)]^{-1}, \quad \beta_1 = [2 (3 + r)]^{-1}, \quad \gamma_1 = \left(\frac{-2}{3} \right) r (r + 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(BS)} \quad & \left. \begin{aligned} F_1 + F_2 &= \left[\left(\frac{1}{4} \right) - \alpha_2 \right]^2 - \left[\left(\frac{7}{240} \right) - \left(\frac{1}{6} \right) \alpha_2 \right], & 0 \leq \chi \leq 1, \quad \eta = r, \\ F_3 &= \left(\frac{2}{3} \right) r \alpha_2^2, & \chi = 1, \quad (-r) < \eta < r, \\ F_4 &= \left[\left(\frac{3}{4} \right) + \alpha_2 \right]^2 - \left(\frac{11}{6} \right) \alpha_2 - \left(\frac{127}{240} \right), & 1 \leq \chi \leq 2, \quad \eta = (-r), \end{aligned} \right\} \quad (22) \\ & \alpha_2 = [2 (3 + r)]^{-1}. \end{aligned}$$

Let one more case be assumed where, instead of the first rib, there is a very stiff plate of infinitely large moment of inertia I_1 , so that the expression $\partial U_{r1}/\partial a_{1w}$ is small and may be neglected.

Consequently:

$$\begin{aligned} \text{(SP)} \quad & \left. \begin{aligned} a^{-2} \left(\frac{\partial U_{rt}}{\partial a_{1w}} \right) &= a^{-2} \left(\frac{\partial U_{r2}}{\partial a_{1w}} \right) = \delta F_5 = \\ &= (32 a^2 r^2 P) (\pi^2 E I_2 w)^{-1} \left[\left(\frac{2r}{3} \right) - 1 \right] \left[1 - \cos \left(\frac{w \pi}{2} \right) \right] F_5, \\ F_5 &= \sum_{n=1}^{\infty} a (n P)^{-1} (a_{2n} - a_{1n}) \left[1 - \cos \left(\frac{n \pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

The differentiation with respect to a_{iw} , where $i > 1$, gives:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a^{-2} \left(\frac{\partial U_{rt}}{\partial a_{iw}} \right) &= \varepsilon [F_6 I_i^{-1} - F_7 I_{(i+1)}^{-1}], \\ \varepsilon &= 32 P a^2 r^2 (3 - 2r) (3 \pi^2 E w)^{-1} \left[1 - \cos \left(\frac{w \pi}{2} \right) \right], \\ F_6 &= \sum_{n=1}^{\infty} a (n P)^{-1} [a_{in} - a_{(i-1)n}] \left[1 - \cos \left(\frac{n \pi}{2} \right) \right], \\ F_7 &= \sum_{n=1}^{\infty} a (n P)^{-1} [a_{(i+1)n} - a_{in}] \left[1 - \cos \left(\frac{n \pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

In the case where all the ribs are stiff plates of infinitely large moments of inertia, I_i , all the expressions $\frac{\partial U_{rt}}{\partial a_{iw}}$ are negligibly small and one may write:

$$\text{(SR)} \quad \frac{\partial U_{rt}}{\partial a_{iw}} = 0. \quad (24a)$$

The strain energy U_s stored in the entire sheet is given by:

$$U_s = (tG)^{-1} \left[\sum_{i=1}^m L_i \int_0^{2a} q_i^2 dz + \sum_{i=1}^m L_i \int_{-b}^{+b} q w^2 dy \right], \quad (25)$$

$$a^{-2} \left(\frac{\partial U_s}{\partial a_{iw}} \right) = 2 L_i P (tG a^2)^{-1} \left[\left(\frac{a a_{iw}}{P} \right) + \sin \left(\frac{w \pi}{2} \right) \right]. \quad (26)$$

The total strain energy U_{str} stored in the stringers is:

$$U_{str} = t_e E^{-1} \sum_{p=1}^m \int_0^{2a} dz \int_0^{Lp} \sigma_p^2 dz_p. \quad (27)$$

After all transformations one obtains for $i \neq p$:

$$\left. \begin{aligned} a^{-2} \left(\frac{\partial U_{str}}{\partial a_{iw}} \right) &= L_i w^2 \pi^2 (2 E t_e a^3)^{-1} \left[\sum_{j=1}^{j=m-1} L_j a_{jw} K_j + a_{mw} \left(\frac{1}{2} \right) L_m^2 \right], \\ K_j &= \sum_{k=j}^m L_k - \left(\frac{1}{2} \right) L_j. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

For $i = p$:

$$\left. \begin{aligned} a^{-2} \left(\frac{\partial U_{str}}{\partial a_{iw}} \right) &= w^2 \pi^2 (2 E t_e a^3)^{-1} \left[\sum_{j=1}^{j=m-1} L_j a_{jw} K_j + \left(\frac{1}{3} \right) a_{mw} L_m^3 \right], \\ K_j &= \sum_{k=j}^m \left(\frac{L_k^2}{2} \right) - \left(\frac{L_j^2}{6} \right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Eq. (28) is valid for all the fields having $i < m$, whereas eq. (29) is valid for the last field with $i = m$.

For the box consisting only of one field one obtains:

$$a^{-2} \left(\frac{\partial U_{str}}{\partial a_{1w}} \right) = L^3 w^2 \pi^2 (6 E t_e a^3)^{-1} a_{1w}. \quad (30)$$

The coefficient a_{in} has the dimensions, lb/inch. In order to deal with dimensionless coefficients the following must be introduced:

$$b_{in} = a_{in} a P^{-1}. \quad (31)$$

After some transformations the condition of a minimum of the total strain energy stored in the structure may be given in the following dimensionless forms:

$$(P a)^{-1} \left(\frac{\partial U_{tot}}{\partial b_{iw}} \right) = (P a)^{-1} \left[\left(\frac{\partial U_{rt}}{\partial b_{iw}} \right) + \left(\frac{\partial U_s}{\partial b_{iw}} \right) + \left(\frac{\partial U_{str}}{\partial b_{iw}} \right) \right]. \quad (32)$$

For $b_{iw} = b_{1w}$:

$$\begin{aligned} (P a)^{-1} \left(\frac{\partial U_{tot}}{\partial b_{1w}} \right) &= A \sin \left(\frac{w \pi}{2} \right) - B w^{-1} \left[1 - \cos \left(\frac{w \pi}{2} \right) \right] F_5 + C \left[b_{1w} + \sin \left(\frac{w \pi}{2} \right) \right] + \\ &+ D w^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{j=m-1} L_j a^{-1} b_{jw} \bar{K}_j \right] + \left(\frac{1}{2} \right) b_{mw} (L_m a^{-1})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

where the dimensionless coefficients are:

$$A = 4 P a^2 r (E I_1)^{-1} \sum_{i=1}^4 F_i,$$

$$B = 32 P a^2 r^2 (3 - 2r) (3 \pi^2 E I_2)^{-1},$$

$$C = 2 L_1 P (tG a^2)^{-1}, \quad D = L_1 \pi^2 P (2 E t_e a^2)^{-1},$$

$$\bar{K}_j = \sum_{k=j}^m L_k a^{-1} - (2 a)^{-1} L_j.$$

For b_{iw} , $i \neq m$:

$$(Pa)^{-1} \left(\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial b_{iw}} \right) = H w^{-1} \left[1 - \cos \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] [a^4 F_6 I_i^{-1} - a^4 F_7 I_{(i+1)}] + C_i \left[b_{iw} + \sin \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] + D_i w^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i=m-1} L_j a^{-1} b_{jw} \bar{K}_j \right] + \left(\frac{1}{2} b_{mw} (L_m a^{-1})^2 \right) \right\}, \quad (34)$$

$$H = 32 P r^2 (3 - 2r) (3 \pi^2 E a^2)^{-1},$$

$$C_i = 2 L_i P (t G a^2)^{-1}, \quad D_i = L_i \pi^2 P (2 E t_e a^2)^{-1}.$$

For the last field where $b_{iw} = b_{mw}$ one has under the assumption that the rigidity of the construction at the fixed end is infinitely great:

$$(Pa)^{-1} \left(\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial b_{mw}} \right) = H w^{-1} \left[1 - \cos \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] a^4 I_m^{-1} F_6 + C_m \left[b_{mw} + \sin \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] + D_m w^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i=m-1} L_j a^{-1} b_{jw} \bar{K}_j \right] + \left(\frac{1}{3} \right) b_{mw} (L_m a^{-1})^2 \right\}, \quad (35)$$

$$\bar{K}_j = a L_m^{-1} \left[\sum_{k=j}^m L_k^2 (2 a^2)^{-1} - L_j^2 (6 a^2)^{-1} \right].$$

In the case of the stiff plate in place of the first rib, eq. (33) should be replaced by the following equation, all others being the same as before:

$$(Pa)^{-1} \left(\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial b_{1w}} \right) = -B w^{-1} \left[1 - \cos \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] F_5 + C \left[b_{1w} + \sin \left(\frac{w\pi}{2} \right) \right] + D w^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i=m-1} a^{-1} L_j b_{jw} \bar{K}_j \right] + \left(\frac{1}{2} \right) b_{mw} (L_m a^{-1})^2 \right\}. \quad (36)$$

In case the box consists of only one field, and with the assumption that the rigidity of the construction at the fixed end is infinitely great, one obtains:

$$(Pa)^{-1} \left(\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial b_{1w}} \right) = (A + C) \sin \left(\frac{w\pi}{2} \right) + (C + N w^2) b_{1w}, \quad (37)$$

$$N = L^3 \pi^2 P (6 E t_e a^4)^{-1}.$$

In the case of a stiff plate:

$$(Pa)^{-1} \left(\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial b_{1w}} \right) = C \sin \left(\frac{w\pi}{2} \right) + (C + N w^2) b_{1w}. \quad (38)$$

In the case when all the ribs are infinitely stiff, one has to put $A = B = 0$ in (33) and the term containing H in (34) and (35) also equal to zero. Consequently in this case one has to use (34) for all the fields with the exception of the last one and (35) for the last field. The last equations represent in each considered case a set of an infinite number of linear equations, from which the unknown Fourier coefficients can be determined. The two constraining conditions in the dimensionless form are:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} - b_{13} + b_{15} - b_{17} + b_{19} - \dots - \left(\frac{1}{2r} \right) &= 0, \\ b_{i1} - b_{i3} + b_{i5} - b_{i7} - \dots - b_{(i+1)1} + b_{(i+1)3} - b_{(i+1)5} + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

The normal stresses in the stringers can be calculated from (16):

$$a^2 P^{-1} \sigma_p = -t_e^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} L_i \sum_{w=1}^{\infty} b_{iw} \left(\frac{1}{2} \right) w \pi \cos \left(\frac{w\chi\pi}{2} \right) + z_p \sum_{w=1}^{\infty} b_{pw} \left(\frac{1}{2} \right) w \pi \cos \left(\frac{w\chi\pi}{2} \right) \right\}. \quad (40)$$

In the case of a box with one field only, the normal stresses at the fixed end are given by the formula:

$$a^2 t_e (P L)^{-1} \sigma_p = - \sum_{w=1}^{\infty} b_{1w} \left(\frac{1}{2} \right) w \pi \cos \left(\frac{w\chi\pi}{2} \right). \quad (41)$$

It is obvious that at any arbitrary cross section the total force in the upper side of the box is numerically equal to the total force in the lower side but has an opposite sign. Also the moment of these forces with respect to the x -axis is equal to the moment of the external force.

6. Uniformity of the Direction of the Shear Flow.

The numerical examples given below show that the distribution of stresses differs completely from that given in practical tests. The distribution of normal and shear stresses shows on both sides of the box positive and negative values. In order to exclude these oscillations the author considered the possibility of superposition of a new constraining condition on the whole system which may restrict the values of stresses to a certain limit.

Assume that shear flow should be always positive. According to the accepted sign convention, it means that certainly in the upper part of the box there will be always compression in stringers, and in the bottom side tension. Assume a Fourier series

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n \varphi + \beta_n \sin n \varphi). \quad (42)$$

This Fourier series is then and only then definite positive, i. e., in the whole period from 0 to 2π it assumes only positive values, when all the determinants

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 + i\beta_1 & \dots & \alpha_{n-1} + i\beta_{n-1} \\ \alpha_1 - i\beta_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-2} + i\beta_{n-2} \\ \alpha_2 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\beta_1 & \dots & \alpha_{n-3} + i\beta_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} - i\beta_{n-1} & \alpha_{n-2} - i\beta_{n-2} & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad (43)$$

are simultaneously positive¹⁴.

Thus one obtains infinitely many conditions for infinitely many coefficients. In the present case already the determinant of the second order gives the condition $-(a_{i1})^2 > 0$, which naturally cannot be fulfilled. Thus there exists no possibility of assurance of uniformity of the shear flow in the given case. The expression of the shear flow (1) in form of the full Fourier series (42) may help in this case.

7. Numerical Examples.

a) One Field Box.

The above-derived formulas are applied at first to the case where a cantilever box consists of only one field and has the following characteristic data: $r = 0.2$, $h = 0$. The ratio

$$N/C = \left(\frac{\pi^2 G}{12 E} \right) \left(\frac{t}{t_e} \right) \left(\frac{L}{a} \right)^2$$

represents to a certain extent, the "slenderness" of the box. For comparison purposes, two extreme values of this ratio were chosen. The enclosed tables and figures contain all data and results. In each case there were calculated 20 Fourier coefficients showing good convergency¹⁵. Because of the single field, only the symbols b_w were used. Fig. 2 shows the shear flow and Fig. 3, the normal stress distribution at the fixed end in case 1.

¹⁴ This theorem given in this form excludes the case of the vanishing of some of the determinants. Nevertheless, it is valid also in this case O. Toeplitz: Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichen Veränderlichen. Mathem. Ann., Leipzig 70 (1911).

¹⁵ The Riemann's theorem on the convergent Fourier series states that one must prove $\lim a_k \rightarrow \infty = 0$. See Jackson and Dunham: Fourier Series and Orthogonal Polynomials. The Carus Math. Monographs 6.

Table 1. Characteristic data.

No.	1	2	3	4	1'	2'	3'	4'
Type of loading	(CL)	(US)	(BS)	(SP)	(CL)	(US)	(BS)	(SP)
N, C	0.001, 0.01	0.001, 0.01	0.001, 0.01	0.001, 0.01	10000, 30	10000, 30	10000, 30	10000, 30
A	13.1819581	11.9960932	1.7485039	0	13.1819581	11.9960932	1.7485039	0

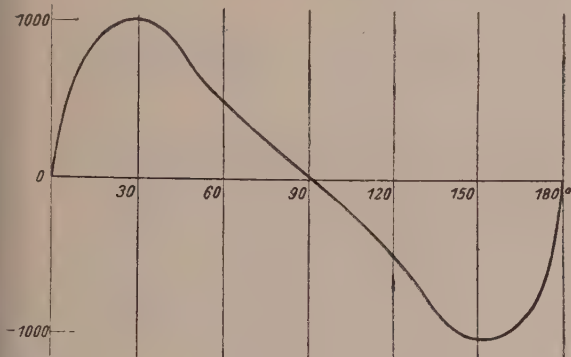


Fig. 2.

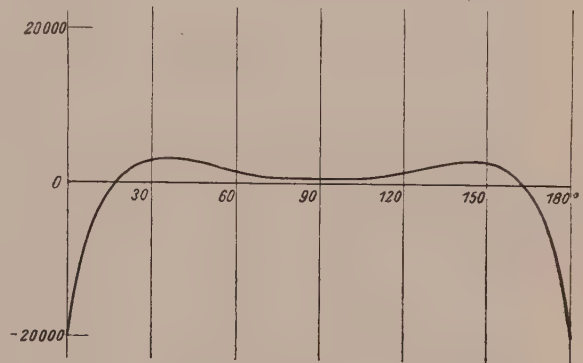


Fig. 3.

Table 2. Distribution of Bending Moment in the First Rib.

No.	$\chi = 0$	$0 \leq \chi \leq 1, \eta = +r$	$\chi = 1$	$\chi = 1, (-r) \leq \eta \leq r$	$\chi = 1, \eta = (-r)$	$1 \leq \chi \leq 2, \eta = (-r)$	$\chi = 2$
1	0.557291	$0.557291 - \chi$	-0.442708	-1.171875η -0.208333	0.026041	0.026041	0.026041
2	0.204861	$0.204861 - (1/2)\chi^2$	-0.295138	-0.781250η -0.138888	0.017361	0.017361	0.017361
3	0.093750	$0.093750 - (1/4)\chi^2$	-0.156250	-0.781250η	0.156250	$0.906250 + (1/4)\chi^2 - \chi$	-0.093750

b) Case of 2 Ribs Infinitely Stiff.

As mentioned in the introduction, the choice of a rectangular cross section for the box permits one to compare the results of calculations with the results of tests. The distribution of normal stresses at the fixed end, in the case of the single-field box with an infinitely stiff plate in place of the first rib, presented in Fig. 4, differs considerably from the well-known results of tests. In order to have a clearer picture of the observed phenomenon, two more cases were taken into account.

Table 3. Shear Flows.

Case	Field	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1	First	0.0	0.26384	1.13394	2.50198	1.13394	0.26384	0.0
	Second	0.0	0.14604	0.68268	2.50009	0.68268	0.14604	0.0
2	First	0.0	0.48160	1.57190	2.49999	1.57190	0.48160	0.0
	Second	0.0	1.76962	2.26556	2.49999	2.26556	1.76962	0.0

Assume a two-field box ($m = 2$) with infinitely stiff ribs. Let it be: $C_1 = C_2 = 0.01$, $D_1 = D_2 = 0.001$, $(L_1/a) = (L_2/a) = 1$ in case 1, and $(L_1/a) = (L_2/a) = 10$ in

case 2, $r = 0.2$. Formulae (34) and (35) together with two constraining conditions (39) give a set consisting of 2 times infinite number of equations. The first few coefficients calculated show a good convergency of the Fourier series¹⁶. Table 3 gives the value of the shear flow $q_{in} a P^{-1}$ and Table 4, the values of the normal stresses $(a^2 t_e \sigma_p) (P L_i)^{-1}$.

Table 4. Normal Stresses.

Case	Section	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1	Second Rib	-1.47064	-0.33062	-5.38091	0	5.38091	0.33062	1.47064
	(Third Rib) Fixed end	-3.83808	1.25125	-11.76543	0	11.76543	-1.25125	3.83808
2	Second Rib	-1.25018	-1.99891	-4.24487	0	4.24487	1.99891	1.25018
	(Third Rib) Fixed end	-8.07507	-4.93013	-5.21191	0	5.21191	4.93013	8.07507

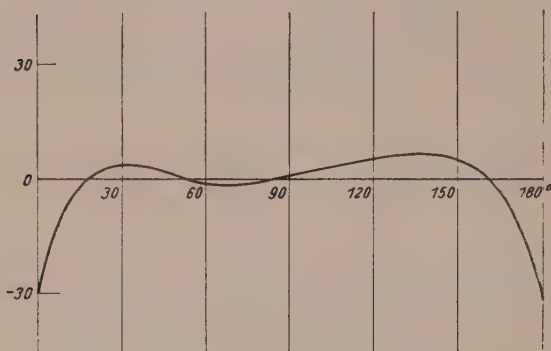


Fig. 4.

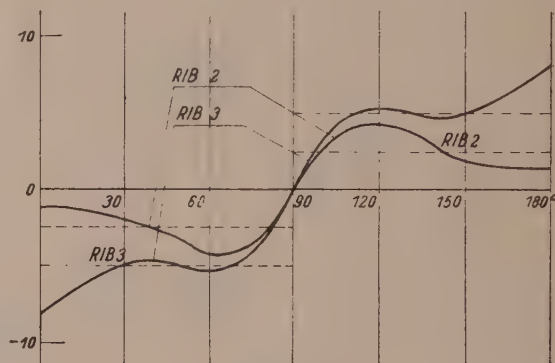


Fig. 5.

Fig. 5 represents the distributions of normal stresses in Case 2. The dotted lines in Fig. 5 give the values of the normal stresses calculated from the conventional formula $\sigma_p = (M y)/I$ with the use of the values:

$$M = P L_1, \quad y = b, \quad I = 2 a t_e b^3. \quad (44)$$

Hence for the second rib:

$$(\sigma_p a^2 t_e) (P L_1)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) a b^{-1} = (2r)^{-1} = 2.5. \quad (44a)$$

For the fixed end this value is equal to 5.

II. Discussion of the Results and Conclusions.

The procedure used in Part I. follows precisely the method widely used in engineering calculations¹⁷. The distributions of shear flows and normal stresses in cases of ribs of a finite stiffness are more or less similar to those in Fig. 2 and 3. In cases with ribs of infinite stiffness the obtained results give a picture entirely different from that obtained from tests. Tests show that the maximum normal stresses are at the longitudinal edges of the box if shear lag plays a part, or the normal stresses are uniform along the entire longer side of the rectangular cross section if shear lag does not play any part.

¹⁶ See Footnote 15.

¹⁷ See footnote 3, paper of R. S. Levy: J. appl. Mechan., March, Trans. A. S. M. E. 70, 30 (1948), etc.

Let a detailed discussion on the necessary and sufficient conditions of a minimum of a function of many variables be omitted here. From a general stand point it is usually enough to represent these conditions in the following form: a) First partial derivatives with respect to all the independent variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, are equal to zero, b) the matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} > 0, \quad (45)$$

must be definite positive, which means that all the determinants marked by dotted lines must be simultaneously positive. In the last condition there are automatically contained the conditions that all the second partial derivatives, $\partial^2 F / \partial x_n^2$, must be positive. a and b are general conditions for all the relative and absolute minima. Castigliano's Second Theorem contains the notion of a minimum of energy in the sense of an absolute minimum. Equating to zero the first partial derivatives of the total strain energy of a body expressed as a function of unknown coefficients with respect to these unknown coefficients, absolutely does not mean that one obtains an absolute minimum of the strain energy even if conditions (45) are fulfilled. In the case of the method explained in this paper the second partial derivatives for the box with ribs of an infinitely great stiffness are as follows:

For $i < m$

$$(P a)^{-1} \left(\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial b_i w^2} \right) = C_i + D_i w^2 L_i a^{-1} \bar{K}_i, \quad (46a)$$

$$(P a^{-1}) \left(\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial b_{iw} \partial b_{jw}} \right) = D_i w^2 L_j a^{-1} \bar{K}_j, \quad (46b)$$

for $i = m$:

$$(P a)^{-1} \left(\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial b_{mw}^2} \right) = C_m + D_m w^2 \left(\frac{1}{3} \right) (L_m a^{-1})^3, \quad (47a)$$

$$(P a)^{-1} \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial b_{mw} \partial b_{jw}} = D_m w^2 L_j a^{-1} \bar{K}_j. \quad (47b)$$

The obtained value is a minimum since the matrix is a definite positive one. But this minimum of the function does not coincide with the absolute minimum of the strain energy in the actual conditions. The stresses calculated are in many points greater than the stresses obtained by use of the conventional formula (Fig. 5). In certain points of the compression side there are tensile stresses and on the tensile side, compressive stresses. The value of stresses for 90° drops down to zero which is in contradiction to all the results of practical tests. The difference in areas under the curved line, taken with the corresponding signs, is equal on each side of the box to the area under the dotted line (concerning the absolute value and the sign). This comes out of the formula for the second rib:

$$\int_0^a (P L_1)^{-1} a^2 t_e \sigma_p d\zeta = - \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} b_{1w} \left(\frac{w \pi}{2a} \right) \cos \left(\frac{w \zeta \pi}{2a} \right) d\zeta = - (2r)^{-1}. \quad (48)$$

All this means that the value of the total strain energy used in the so-called principle of least work method, at the point obtained by equating to zero the first partial derivatives taken with respect to the unknown Fourier coefficients, does not represent the absolute minimum of the total strain energy which occurs in actual conditions.

The value of the strain energy used in calculations is greater than the value of the actual strain-energy. Consequently, in order to be able to apply successfully and infallibly Castigliano's theorem to specific problems, we have to be assured a priori, that the redundant generalized forces or unknown stress distributions are expressed by such functions or such sets of functions, among which there is one and only one function or set of function which gives a smaller value to U_{tot} than any other gives, having first taken the given values on the boundary. Being assured that such an absolute minimum exists, we present the strain-energy as a function of the redundant generalized forces or of the unknown coefficients, and, next, we express in an analytical form the statement that the strain-energy has a stationary value for small variations in b_{in} by equating to zero the first partial derivatives of U_{tot} with respect to b_{in} . This gives the correct solution.

In practice this means that application of any arbitrary function may give results lying so far from reality that they cannot even be considered to be approximate (as in the present paper). Hence, in order to obtain good approximate results, one has to apply in each particular case a particular function. When we apply this procedure to the calculation of the redundant generalized forces which can be analytically expressed in one and only one way, the procedure is usually successful¹⁸. When we apply this procedure to the calculation of the redundant generalized forces or stresses which are expressed as a certain function with unknown coefficients, without an assurance a priori that among the applied functions or sets of functions there is one and only one which gives a least value to U_{tot} , then the procedure may not be successful. Hence, it seems rather doubtful whether in these cases the procedure may be considered even as an approximate method. This is a random choice method.

Final Remarks.

Another example (stresses in cylinder with a cut-out by using a double Fourier series) calculated by the author¹⁹ seems to give similar results to those cited above. As mentioned before, Pöschl in 1936 called attention to the necessity of a distinction between two basic cases: concentrated forces and distributed stresses. A very brief representation of the results obtained in the present paper was published by the author in the past²⁰. But from that time the author obtained a few letters from here and there in which writers tried to seek other reasons for the discrepancy between theory and tests. One of them (Prof. M. T. H.) maintains that the crossing of the elasticity limit is the main reason for that. It seems that all of those writers are unaware of Pöschl's paper; this statement is confirmed by the fact that Pöschl's paper and results are not cited in books and works on theory of elasticity and strength of materials published even lately. The author takes the opportunity to present in this paper all the details of the calculations (not published previously) to prove that the functional relation between stress and strain in whatsoever form it may be has absolutely and definitely no decisive influence upon the crucial (Pöschl's) point of the problem, i. e. the variational nature of the problem and the absolute minimum.

¹⁸ Beams, frameworks, rings, etc.

¹⁹ M. Z. Krzywoblocki: Application of Double Fourier Series to the Calculation of Stresses Caused by Pure Bending in a Circular Monocogue Cylinder with a Cut-Out. The Polish Institute of Arts and Sciences in America, April, 1946. Also Polytechnic Institute of Brooklyn, 1944—45.

²⁰ M. Z. Krzywoblocki: On the So-Called Principle of Least Work Method. Jour. Franklin Instit. **243**, 187—204 (1947) and **244**, 465—469 (1947).

(Eingegangen am 14. Juni 1949.)

Berichte.

Die überkritische Unterschallströmung.

Von H. Parkus, Wien.

Ergänzung.

Angeregt durch eine Zuschrift von Herrn K. Oswatitsch, Stockholm, mochte ich meinem Bericht, der in Bd. 4, S. 88 (1950) dieses Archivs erschienen ist, die nachstehenden Ergänzungen hinzufügen.

Die in diesem Bericht wiedergegebene Deutung der Helmbold'schen und Göthert'schen Versuche legt den Reibungseinflüssen am Profil entscheidende Bedeutung für den Widerstandsverlauf nach Überschreiten der kritischen Machzahl bei. Nun hat Herr Oswatitsch in mehreren Arbeiten der jüngsten Zeit¹ mit Hilfe einer von ihm aufgestellten Integralgleichung, die im ganzen gemischten Unter-Überschallgebiet gilt, zeigen können, daß es auch ohne Berücksichtigung der Reibung gelingt, gewisse typische Vorgänge am dünnen, nicht angestellten Profil, vor allem also den Widerstandsanstieg in zufriedenstellender Übereinstimmung mit den Versuchen wiederzugeben. Weitere Aufschlüsse wird man nach gründlicherer Durchforschung der Lösungen der Integralgleichung, besonders bei Ausdehnung der Theorie auf angestellte Profile erwarten dürfen.

Das am Schlusse meines Berichtes erwähnte Anlegen der Kopfwelle bei $M \rightarrow \infty$ kann bei einem Profil mit stumpfer Nase nicht eintreten, wie hiermit richtiggestellt sei. Es bleibt stets ein wenn auch kleiner Unterschallbereich zwischen Stoßlinie und Staupunkt.

Buchbesprechungen.

Energieübertragung mit Gleichstrom hoher Spannung. Von K. Baudisch. Unter Benutzung von Arbeiten von M. Bosch, E. Janetschke, E. Rolf, P. Schnecke. Mit 199 Textabb., VII, 309 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. Geb. DM 27.—.

Mit Rücksicht darauf, daß heute Drehstromübertragungen mit einer Spannung von 400 kV gebaut werden können, steht zur Zeit die Energieübertragung mit Gleichstrom hoher Spannung nicht im Vordergrund des Interesses. Es ist aber vor und während des zweiten Weltkrieges vor allem in Deutschland soviel Forschungs-, Entwicklungs- und Versuchsarbeit auf die Gleichstromübertragung aufgewendet worden, daß es notwendig ist, ein Bild über den gegenwärtigen Stand der Gleichstrom-Hochleistungsübertragung zu zeichnen. Der Verfasser empfiehlt sich für diese Aufgabe besonders gut; war er doch als Leiter des Stromrichterwerkes in Berlin-Siemensstadt in den Kriegsjahren mit jener Arbeitsgemeinschaft verbunden, die die Versuche und Entwicklungen ausführte.

Der Verfasser ist überdies aus seinen bisherigen Veröffentlichungen dafür bekannt, daß er den Stoff anschaulich und klar darstellen kann. Man geht daher mit Vergnügen an das Studium des Buches heran und wird auch nicht enttäuscht.

Begonnen wird mit einer theoretischen Untersuchung des grundsätzlichen Verhaltens einer Gleichstromübertragung mit Stromrichtern. Dann werden die verschiedenen Arten der Regelung der Gleichstromübertragung behandelt und es wird gezeigt, daß ein Blindlaststoß vor allem die Frequenz im Drehstromnetz beeinflusst, während mit einem Wirklaststoß eine Spannungsänderung mit einer Frequenzänderung eintritt. Ein kurzer Abschnitt über die Stabilität eines Drehstromnetzes, das durch einen Wechselrichter gespeist wird, schließt jenen Teil des Buches ab, der der Gleichstromübertragung im allgemeinen gewidmet ist. Nun folgen die Besprechungen der Schaltung der Gleich- und Wechselrichter, der Stromrichter einschließlich des Lichtbogen-Stromrichters von E. Marx und der Freileitungen und Kabel. Einen breiten Raum nimmt selbstverständlich das Schaltproblem ein. Den Schluß bilden die Beschreibungen von Versuchsfeldanlagen und Versuchsübertragungsanlagen. Ein paar Worte sind noch über die Anordnung der Stromrichterstation gesagt. Ein Schrifttumsverzeichnis gibt einen Überblick über die einschlägigen Bücher und Zeitschriftenaufsätze.

¹ K. Oswatitsch: Z. angew. Math. Mech. 30, S.17 (1950); Acta Physica Austriaca (im Druck).

Dem Verfasser ist für seine Arbeit zu danken. Das Buch wird die Grundlage für weitere Arbeiten auf dem Gebiete der Gleichstromübertragung bilden und den damit Beschäftigten ein willkommener Wegweiser sein, der manche wertvolle Anregungen bietet.

Die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet, wie es zur Überlieferung des Springer-Verlages gehört.
H. Sequenz, Wien.

Technische Strömungslehre. Von B. Eck. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 372 Textabb., X, 398 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1949. DM 24.—, geb. DM 27.—.

Die vorliegende dritte Auflage ist gegenüber der 1944 erschienenen zweiten nicht unwesentlich erweitert, ergänzt und zum Teil auch umgearbeitet worden. Auf diese Weise wird den heutigen Bedürfnissen der Techniker bis zu einem gewissen Grade Rechnung getragen. Neu ist z. B. die Aerodynamik der Verbrennung, der turbulente Mischungsvorgang in Verbrennungsräumen, ferner einige Abschnitte über Sichtung, pneumatische Förderung und Entstaubung. Umgearbeitet ist das Kapitel über Strömungen um Profile. Hervorzuheben sind noch die Abschnitte über Nabendiffusoren, Labyrinthdichtungen, Schmiermittelreibung, Winddruck und schließlich eine neue Zusammenstellung der Grundgesetze im Kapitel Gasdynamik, das aber im ganzen nur 26 Seiten umfaßt und daher als knappe Einführung zu werten ist.

Das Bestreben des Verfassers, die Erscheinungen möglichst anschaulich und unter Vermeidung schwieriger mathematischer Hilfsmittel zu erklären, geht manchesmal etwas zu weit, weil die in Kleindruck angefügten strengeren Darstellungen nicht immer aufschlußreich genug sein können. Vielfach fehlen auch ausführliche Literaturangaben, die den fortgeschrittenen Lesern ein vertiefteres Verständnis der behandelten Probleme vermitteln könnten. So wird z. B. bei den Zyklonen wohl der Begriff des „Sperrkreises“ benutzt, Literaturangaben über die Arbeiten von E. Feifel, der diesen Begriff eigentlich eingeführt hat, fehlen aber gänzlich.

Das Buch ist geschickt zusammengestellt und wird zur ersten Information vielen praktischen Technikern gute Dienste leisten.
F. Magyar, Wien.

Praktische Spannungsoptik. Von L. Föppl und E. Mönch. Mit 135 Textabb., VII, 162 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. Geb. DM 21.—.

In dem Buch sind die Arbeitsweise und die Erfahrungen des führenden deutschen spannungsoptischen Laboratoriums an der Technischen Hochschule München niedergelegt.

Auf die elastizitätstheoretischen und optischen Grundlagen wird nur kurz eingegangen, da hierüber z. B. in dem Buch von Frocht ausführliches Material zu finden ist. Ebenso wird die Frage der Apparatur nur kurz gestreift und nur die Anlage mit Polarisationsfiltern etwas näher beschrieben. Die Verfasser empfehlen sie als die weitaus einfachste, bequemste und billigste Einrichtung und weisen darauf hin, daß das vielfach geäußerte Mißtrauen wegen des nicht völlig parallelen Strahlenganges unberechtigt ist, wenn eine Kleinbildkamera mit Teleobjektiv für die Aufnahmen verwendet wird.

Ausführlich wird dagegen die Frage der mechanischen und thermischen Behandlung des Modellwerkstoffes und der fertigen Modelle besprochen. Den Verfassern ist hier bekanntlich ein entscheidender Fortschritt gelungen durch die Entwicklung eines Schutzüberzuges, der den Wasserverlust beim Lagern und besonders beim Ausheizen verhindert und so den außerordentlich störenden „Randeffekt“ ausschaltet.

Eine sehr eingehende Besprechung erfährt auch die räumliche Spannungsoptik, wobei wieder das Hauptgewicht auf präzise Angaben zur thermischen Behandlung der Modelle gelegt wird. In dem Abschnitt über Plattenbiegung wird leider nicht auf das geistreiche Verfahren von Favre und Gilg hingewiesen, welches die Plattenbiegung mit den Methoden der ebenen Spannungsoptik zu behandeln gestattet.

Der zweite Abschnitt des Buches bringt Sonderprobleme, welche die vielseitige Anwendbarkeit der Spannungsoptik deutlich zeigen. Besonders hervorzuheben sind hier die Zeitlupenaufnahmen von durch eine herabfallende Last auf Biegung beanspruchten Stäben. Die Verfasser stellen fest, daß die Versuche die alte St. Vénant-Flamantische Theorie ausgezeichnet bestätigen.

Das Buch ist für jeden, der mit spannungsoptischen Versuchen zu tun hat, unentbehrlich. Die Ausstattung ist vorzüglich.
H. Parkus, Wien.

Schornsteine. Rauchfänge und Abgasleitungen. Von O. Göhring. („Gesundheitstechnik“: Band 2.) Mit 22 Textabb., IV, 37 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 10.—.

Die Beurteilung der Schornsteinfrage ist zumal bei den kleinen Feuerungen des Haushaltes, des Gewerbes und der Zentralheizungen eine meist undurchsichtige, aber oft schwerwiegende

Angelegenheit. Sie wird in der Praxis vielfach durch halbzutreffende Begriffsbildung und mystische Vorstellung verwirrt. Der vorliegende Band Prof. Dr. Göhrings bringt hier in einfacher Darstellung und knapper Form Klarheit. Es werden die Schornsteinbedingungen für Kohlen- und Koksfeuerungen sowie für Gasfeuerungen ausreichend behandelt. In baulicher Hinsicht werden neuzeitliche Elemente beschrieben. Für die Berechnung wird auf eine theoretische Ableitung verzichtet und die Benützung von bewährten Erfahrungsformeln (S. 28) empfohlen. Sowohl der Rauchfangkehrer, wie der entwerfende Ingenieur finden hier wertvolle Anhaltspunkte.

M. Szombathy, Wien.

Leben und Schaffen der Reichsbahn-Brückenbauer Schwedler, Zimmermann, Labes, Schaper. Eine kurze Entwicklungsgeschichte des Brückenbaues. Von A. Hertwig. Mit 14 Textabb., VIII, 154 S. Berlin: W. Ernst & Sohn. 1950. DM 15.—, geb. DM 17.50.

Das vorliegende Buch verdankt seine Entstehung einer Anregung des Verlagsbuchhändlers Dr. Ing. h. c. Georg Ernst, der damit das Wirken und Leben der hervorragendsten Brückenbauer der Reichsbahn für die kommenden Generationen festhalten wollte. Wenn es auch nicht möglich war, die grundlegenden Veröffentlichungen dieser Pioniere des Brückenbaues in das vorliegende Buch vollständig aufzunehmen, so sind doch die wissenschaftlichen und praktischen Arbeiten soweit im Rahmen der Biographien wiedergegeben, daß sich der Leser ein Bild über die Bedeutung dieser vier Brückenbauer machen kann. Verzeichnisse über ihre wissenschaftlichen Abhandlungen und ihre Bauausführungen vervollständigen dieses Bild.

Es ist ein unzweifelhaftes Verdienst Prof. Hertwigs, diesen Beitrag zur Geschichte des Brückenbaues in Deutschland geschrieben zu haben.

E. Melan, Wien.

Die Edeltahlerzeugung. Schmelzen, Gießen, Prüfen. Von F. Leitner und E. Plöckinger. Mit 174 Textabb., VIII, 490 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 186.—, geb. S 198.—; sfr. 59.—, geb. sfr. 62.50; \$ 13.60, geb. \$ 14.50; DM 57.—, geb. DM 60.—.

Die Verfasser, beide als ausgezeichnete Fachleute bekannt, haben in ihrem Werk sowohl die theoretischen als auch die praktischen Grundlagen der Edeltahlerzeugung lückenlos dargestellt. Wenn auch die erschöpfende Behandlung fast jedes einzelnen Abschnittes ein Buch gleichen Umfanges füllen könnte, so sind doch sämtliche Fragen, die den Stahlwerker berühren, in einer sehr klaren Weise auf Grund der jüngsten Forschungsergebnisse berücksichtigt. Das Handbuch ist jedoch nicht das Ergebnis einer trockenen Aneinanderreihung der Literatur, vielmehr haben die Verfasser auf Grund ihres reichen Erfahrungsschatzes ein lebendiges Werk geschaffen. In diesem Sinne füllt das Buch eine wahre Lücke in der Literatur der Edeltahlerzeugung aus und ist in die Reihe der großen Standardwerke einzureihen.

Die Hauptabschnitte des Buches betreffen die Metallurgie der Edeltahlerzeugung, die Überwachung des Ablaufes der metallurgischen Umsetzung, die Praxis der Edeltahlerzeugung, das Gießen sowie das Prüfen. Der Inhalt ist im einzelnen so reichhaltig, daß er im Rahmen einer Buchbesprechung nur angedeutet werden kann.

Neben einer kurzen Einführung in die Gesetzmäßigkeiten der metallurgischen Reaktionen werden der physikalisch-chemische Aufbau des Stahlbades und der Schlacken, der chemische Umsatz im Frischvorgang sowie die Rolle der Gase im Stahl erläutert.

In einer ausgezeichneten Darstellung wird die Desoxydation des Stahles und der damit zusammenhängenden Abscheidung der Suspensionen aus dem Stahlbad behandelt.

Bezüglich der Überwachung des Ablaufes der metallurgischen Umsetzungen werden die gebräuchlichsten und die neuesten Verfahren der Temperaturmessung sowie die wichtigsten Betriebsanalysen, bzw. Schnellanalysen zur Bestimmung der chemischen Zusammensetzung, die Bestimmung der Viskosität von Schlacke und Stahl sowie die Bestimmung des Oxydationszustandes und des Reinheitsgrades von flüssigem Stahl besprochen.

Für die Stahlerzeugung sind auch die feuerfesten Ofenbaustoffe sowie die Brennstoffe von wesentlicher Bedeutung. Außer diesen Stoffen werden auch die Einsatzstoffe, wie Roheisen, Schrott, Erze, schlackenbildende Zuschlagstoffe, Kohlunsmittel und die Legierungsmetalle, behandelt.

Neben dem Betrieb des Siemens-Martin-Ofens erfährt naturgemäß der des Elektrostahlofens eine eingehende Darstellung. Anschließend werden das Tiegelstahlverfahren und Sonderschmelzverfahren berücksichtigt.

Für die Güte des Stahles sind die Gießbedingungen von wesentlicher Bedeutung. In einem gesonderten Abschnitt werden daher der Erstarrungsvorgang und die Praxis des Gießens besprochen.

Im Abschnitt über die Werkstoffprüfung wird die Prüfung der chemischen Zusammensetzung der Schmelze, die Prüfung und Beurteilung des Rohblockes, die Prüfung der Warm-

verformbarkeit sowie die des warmverformten Werkstoffes auf Fehlerfreiheit und Gefügeausbildung behandelt. Die Ermittlung der mechanischen Güterwerte wird kurz gestreift.

Ein reichhaltiges Namen- und Sachverzeichnis ergänzt das Buch zum Nachschlagewerk. Es ist nicht nur jedem Edeldachfachmann zu empfehlen, sondern wird jedem, der mit der Stahlverarbeitung irgendwie zu tun hat, von größtem Nutzen sein. *A. Leon, Wien.*

Einführung in die Baustatik. Von *E. Melan*. Mit 242 Textabb., X, 328 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 87.—, geb. S 96.—; sfr. 29.—, geb. sfr. 32.50; \$ 6.80, geb. \$ 7.50; DM 28.50, geb. DM 31.50.

Seinen gemeinsam mit Dr. Chmelka im gleichen Verlage herausgegebenen Einführungen in die „Statik“ und „Festigkeitslehre“, die sich weiter Verbreitung erfreuen, hat nun der Verfasser auch eine Einführung in die „Baustatik“ folgen lassen, womit diese Buchreihe einen schönen Abschluß gefunden hat.

Entsprechend der Zielsetzung des Verfassers, die Theorie der Tragwerke in jenem Umfange darzustellen, welcher seiner Hauptvorlesung über Baustatik entspricht, wurde der Stoff auf ebene Tragwerke beschränkt. Raumbauwerke, die Schalenstatik und Stabilitätsprobleme werden demnach nicht behandelt. Das Buch zeichnet sich durch eine glückliche Mischung von wissenschaftlicher Strenge und leichtfachlicher Darstellung aus, die es auch zum Selbststudium sehr geeignet macht. Da das Buch eine Einführung sein soll, wird alles Grundsätzliche möglichst ausführlich besprochen.

Nach einleitenden Abschnitten über den Aufbau und die äußeren und inneren Kräfte der Tragwerke sowie über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden die Formänderungen statisch bestimmter Tragwerke und die Biegelinien eingehend behandelt. Daran schließt sich die allgemeine Theorie statisch unbestimmter Systeme, wobei der Verfasser im Rahmen der Deformationsmethode auch das jetzt viel verwendete Verfahren von Cross mit einer von ihm angegebenen vereinfachten Abänderung und mit seinem Konvergenzbeweis dieses Näherungsverfahrens wiedergibt. Sodann folgt die Theorie der Einflußlinien (einschließlich ihrer kinematischen Ermittlung) mit sorgfältiger Herausarbeitung ihrer Bedeutung für statisch unbestimmte Systeme.

Das in den angeführten Abschnitten bereitgestellte Rüstzeug der Baustatik wird sodann im letzten Abschnitt zur statischen Untersuchung häufig angewandter Tragwerksysteme herangezogen, und zwar: Fachwerkträger auf zwei Stützen, Bogenträger (in einheitlicher Darstellung für den eingespannten Eingelenk- und Zweigelenkbogen), Rahmenträger, mit einem Stabbogen verstärkter Träger und Durchlaufbalken. Bei letzterem findet die Festpunktmethode keine Erwähnung. Hervorzuheben ist die häufige und praktische Anwendung der Formeln von Simpson bzw. Newton zur numerischen Berechnung bestimmter Integrale.

Die reiche baustatische Erfahrung des Verfassers ermöglichte ihm die Einfügung wertvoller praktischer Winke für die zweckmäßige Durchführung statischer Berechnungen; zudem ist das Buch bereichert durch zahlreiche zahlenmäßig vollständig durchgerechnete und mit Erläuterungen versehene Beispiele, die auch jenen Ingenieuren der Praxis, die nur gelegentlich baustatische Aufgaben zu behandeln haben, sehr erwünscht sein werden.

Da es sich um eine Einführung handelt, würde es sich für eine bei der Güte des Buches bald zu erwartende Neuauflage des Buches empfehlen, den Leser durch Hinzufügung eines kleinen Schrifttumsverzeichnisses auch mit den Namen jener Männer vertraut zu machen, die sich um die Grundlegung der Baustatik verdient gemacht haben.

Auch könnten dann neben einer Reihe von Druckfehlern einige Unstimmigkeiten behoben werden. Diese betreffen: eine Bemerkung zum Tragwerk Abb. 40 (S. 21) über dessen äußere Kräfte, ferner die Annahme für das Querschnittsgesetz des eingespannten Bogens (S. 280), die nach dortiger Angabe gleichbedeutend sein soll mit der Konstanz der Projektion des Bogenquerschnittes parallel zur Richtung τ , ferner die Abb. 147 (a), wonach die Biegelinie im mittleren Feld des Durchlaufträgers zwei Wendepunkte aufweist, obgleich der Momentenverlauf in diesem Felde nach Abb. (147 e) nahezu konstant ist.

Auf S. 44 (Zeile 14 von unten) sind $\lambda_n - \frac{1}{2}$ und $\lambda_n + \frac{1}{2}$ zu vertauschen, in Abb. 89 (a) sollten die Längen r_1, r_2 , in Abb. 121 die Lage des Gelenkes im Querschnitt 5 gekennzeichnet sein.

Im Beispiele (e) S. 165 soll die Schrägstellung des rechten Rahmenstieles gegen die Lotrechte mit 1° anstatt mit 10° angegeben werden, damit Übereinstimmung mit dem Ergebnis auf S. 166 erzielt wird. Bei der Erklärung des Verschiebungsplanes (S. 3) fällt auf, daß die Verschiebungen vom Pole O' aus mit entgegengesetztem Richtungssinn, dagegen beim Williotischen Verschiebungsplan in üblicher Weise mit ihrem Richtungssinn aufgetragen werden.

Das vom Verlag mustergültig ausgestattete Werk erfüllt seinen Zweck der Einführung in die Baustatik in vortrefflicher Weise. *K. Federhofer, Graz.*

Metallurgical Applications of the Electron Microscope. A Symposium held at the Royal Institution, London, on 16 November 1949, and organized by the Institute of Metals in association with the Chemical Society, the Faraday Society, the Institute of Physics, the Institution of Electrical Engineers, the Iron and Steel Institute, the Physical Society, and the Royal Microscopical Society. (Institute of Metals. Monograph and Report Series: Nr. 8.) Mit Textabb., VI, 164 S. London: The Institute of Metals. 1950. Geb. 21s., \$ 3.50.

Das Buch enthält 13 Arbeiten, die am 16. November 1949 bei einem Kongreß über die metallurgischen Anwendungen des Elektronenmikroskops an der Royal Institution in London von englischen, französischen, amerikanischen und deutschen Wissenschaftlern vorgetragen worden sind, nebst den diesbezüglichen Diskussionsbemerkungen. Die Tagung wurde durch das Institute of Metals in Verbindung mit der Chemical Society, der Faraday Society, dem Institute of Physics, der Institution of Electrical Engineers, dem Iron and Steel Institute, der Physical Society und der Royal Microscopical Society veranstaltet. Die Monographie gibt eine konzentrierte Darstellung der derzeitigen Einsatzmöglichkeiten des Elektronenmikroskops in der Metallurgie, wobei einige bisher unveröffentlichte Arbeiten der englischen Industrieforschung mit aufgenommen worden sind. Die Tagung ist von dem Leiter der metallurgischen Abteilung im National Physical Laboratory in Teddington, Dr. N. P. Allen organisiert worden, der zugleich mit dem bekannten englischen Fachmann auf dem Gebiete der Elektronenmikroskopie, Dr. V. E. Cosslett, die Diskussionen leitete. Die Vorträge behandeln: Die Anwendung des Elektronenmikroskops in der Metallurgie (N. P. Allen), Das Elektronenmikroskop in der Metallurgie (P. Grivet), Die Anwendungen des Elektronenmikroskops in metallurgischen Untersuchungen während und seit dem Kriege in Deutschland (H. Mahl), Die Strukturen von einigen Nicht-Eisenlegierungen, die durch das Elektronenmikroskop aufgezeigt worden sind (G. L. J. Bailey und Sheila Vernon-Smith), Eine Abdrucktechnik für die Prüfung von Bruchflächen mit dem Elektronenmikroskop (J. Nutting and V. E. Cosslett), Der Trockenabzug von Formvorabdrücken von geätzten Metalloberflächen (J. Nutting and V. E. Cosslett), Die Mikrostrukturen von wasser-gehärtetem, karburiertem Eisen (J. Trotter, D. McLean and C. J. B. Clews), Beobachtungen des Härtungsprozesses durch Alterung an Aluminium-Kupfer-Legierungen (G. L. Bucknell and G. A. Geach), Elektronenmikroskopie von Leichtmetall-Legierungen (F. Keller), Elementare Gleitprozesse in Aluminium, sichtbar gemacht mit dem Elektronenmikroskop (F. Brown), Studien von Nickel-Chrom-Legierungen mit dem Elektronenmikroskop (B. S. Cooper and G. A. Basset), Ein Beitrag zur Prüfung von Metallpulvern durch das Elektronenmikroskop (J. I. Morley), Fortschritte der Elektronenmikroskopie der Metalle in Amerika (mit Ausschluß der Leichtmetalle) (C. M. Schwartz). Jeder, der mit dem Elektronenmikroskop eigene Untersuchungen auf metallographischem Gebiete plant und daher die günstigsten Ätz- und Abdruckverfahren kennen lernen will, kann sich aus dem vorliegenden Buche Rat holen. Jeder aber auch, der sich nur über die Einsatzmöglichkeiten des Elektronenmikroskops auf metallurgischem Gebiete unterrichten will und über die Art der Probleme und die bereits erzielten Ergebnisse, kann an diesem zusammenfassenden Tagungsbericht nicht vorübergehen.

W. Glaser, Wien.

Electromagnetic Theory. (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Band 2.) Mit Textabb., III, 91 S. New York: American Mathematical Society. 1950. Geb. \$ 3.—

Dieser Tagungsbericht enthält neben zehn ganz kurzen Zusammenfassungen sieben ausführlichere Darstellungen von Vorträgen, die vom 29. bis 31. Juli 1948 über die Theorie der Elektrizität am Massachusetts Institute of Technology gehalten worden sind. Der erste Beitrag von Herman Feshbach handelt von der neuen Quantenelektrodynamik, insbesondere von der Form, die ihr in Arbeiten von Julian Schwinger gegeben worden ist. Das wesentliche Ergebnis ist, daß in der neuen Fassung die Theorie für die höheren Glieder in der Feinstrukturkonstanten, die früher stets divergierten, eindeutige, endliche Werte ergibt, welche mit den Experimenten gut übereinzustimmen scheinen. J. L. Synge berichtet unter dem Titel „Metrikfreier Elektromagnetismus“ (Electromagnetism without Metric) über Algebra und Transformationstheorie des schiefsymmetrischen Tensors des elektromagnetischen Feldes. Das Hauptproblem dieser „Maxwell'schen Geometrie“ als der Theorie eines Paares von schiefsymmetrischen Tensoren in vier Dimensionen, ist die invariante Verallgemeinerung der „Strukturgleichungen“, d. h. der Beziehungen zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ einerseits und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits. Ein Beispiel von verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen wird angegeben. Der Beitrag „Unstetigkeit im elektromagnetischen Feld“ (Discontinuity in Electromagnetism) von W. W. Watson handelt von einer Elektrodynamik, in welcher der Satz von der Erhaltung der Ladung nicht erfüllt sein soll. Der folgende Artikel von L. Infeld bespricht die Faktorisierungsmethode von Schrödinger und ihre Anwendungen auf Differentialgleichungen der Physik. Der Beitrag von R. J. Duffin über nichtlineare elektrische Netzwerke handelt von Netzwerken, die der Verfasser „verlässliche“ (reliable networks) nennt und die mit den linearen die Eigenschaft der Eindeutigkeit gemeinsam haben. Beispiele

„verlässlicher“ Netzwerke werden diskutiert. C. L. Pekeris untersucht das Verhältnis von Strahlentheorie und Theorie der Normalschwingungen bei Wellenausbreitungsproblemen. Für das Problem Punktquelle in $z = h$ eines homogenen Mittels mit vollkommen reflektierenden Wänden in $z = 0$ und $z = H$, entwickelt er dazu das Integral für den Hertzschen Vektor einmal in die Strahlungslösung und das andere Mal in die Lösung nach Normalschwingungen und zeigt, daß für dieses Problem die Strahlungslösung aus der Normalschwingungslösung durch eine Poisson-Transformation hervorgeht. Albert E. Heins behandelt gemischte Randwertaufgaben der Elektrodynamik mittels Systemen von Integralgleichungen vom Wiener-Hopf'schen Typus. Das Buch gibt einen bedeutenden Eindruck von der Fülle der Probleme, die den Interessenkreis der heutigen angewandten Mathematik ausmachen.

W. Glaser, Wien.

Hochspannungstechnik. Von A. Roth. Dritte, vollständig neubearbeitete und vermehrte Auflage. Herausgegeben unter Mitwirkung von A. Imhof. Mit 734 Textabb., 98 Zahlentafeln, IX, 704 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 216.—, geb. S 228.—; sfr. 65.—, geb. sfr. 69.—; \$ 15.—, geb. \$ 16.—; DM 63.—, geb. DM 67.—.

Die elektrische Hochspannungstechnik stellt heute eines der größten und wichtigsten Teilgebiete der Elektrotechnik dar und befaßt sich mit Problemen, die von theoretischen Fragen der Elektrophysik bis zu rein praktischen Aufgaben der Konstruktion und des Betriebes elektrischer Apparate, Maschinen und Einrichtungen reichen. Schon in den beiden ersten Auflagen seiner „Hochspannungstechnik“ verstand es der Verfasser, dieses ungeheure Gebiet in klarer, systematischer Weise darzustellen, so daß es zahlreichen Studenten als zuverlässiger Führer gedient hat. Weit darüber hinausgehend unterzieht dieses Standardwerk der Hochspannungstechnik das fast unübersehbare Material an Forschungs- und Erfahrungsergebnissen einer kritischen Sichtung, so daß Arnold Roths „Hochspannungstechnik“ auch dem erfahreneren Fachmann und den in Forschung und Praxis stehenden Bearbeitern der zahlreichen Teilgebiete zum unentbehrlichen Behelf geworden ist.

Die dritte Auflage, die zehn Jahre nach der zweiten erschienen ist, berücksichtigt im vollen Ausmaße den neuesten Stand der Hochspannungstechnik. Die Entwicklung hat sich im letzten Dezennium in der Weise vollzogen, daß wohl grundlegende Neuerungen auf dem Gebiete der Apparate für Atomphysik festzustellen sind, wo das Cyclotron, das Betatron und die Linearbeschleuniger entwickelt wurden, und daß die Vertiefung der Erkenntnisse zu einer vervollständigung der Hochspannungsgeräte führte, ohne jedoch den grundlegenden Aufbau derselben zu verändern. Auch der begonnene Bau der ersten 400-kV-Anlage macht hiervon keine wesentliche Ausnahme.

Die volle Berücksichtigung des neuesten Standes der Hochspannungstechnik hat eine weitgehende Umarbeitung des Werkes notwendig gemacht. So manche der zahlreichen Detailfragen besitzt größte praktische Bedeutung und es ist einer der Hauptvorzüge dieses Werkes, daß bei aller wissenschaftlicher Gründlichkeit und Ausführlichkeit die praktischen Folgerungen stets besonders eingehend diskutiert werden. Dr. Roth gibt im Vorwort eine meisterhafte Charakteristik der neuesten Entwicklung der Hochspannungstechnik und zeigt im einzelnen, wie darauf bei der Neubearbeitung Rücksicht genommen wurde.

Im großen und ganzen wurde der bewährte Aufbau des Werkes beibehalten. Es umfaßt folgende Kapitel: Das elektrische Feld — Die festen dielektrischen Baustoffe der Hochspannungstechnik — Das Öl als Baustoff — Die Luft und andere Gase im elektrischen Feld — Öl im Zusammenbau mit festen Baustoffen — Luft im Zusammenbau mit festen Baustoffen — Elektromagnetische Schwingungs- und Stoßvorgänge — Wirkliche Anforderungen an die dielektrische Festigkeit im praktischen Betrieb und Prüfvorschriften — Einrichtungen für den Hochspannungsprüfraum — Der Lichtbogen in Luft und unter Öl — Hochstromprobleme in Hochspannungsanlagen — Hochspannungsanlagen für Wechselstrom — Hochspannungsanlagen für Gleichstrom.

An der vorliegenden dritten Auflage der Hochspannungstechnik hat wieder Prof. Imhof mitgearbeitet und hat eine Reihe von Abschnitten selbständig bearbeitet.

Dem Werk ist ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis beigegeben, welches unter anderem auch die einschlägigen VDE-Vorschriften, die seit 1938 nicht mehr in einer zusammengefaßten Ausgabe vorliegen, berücksichtigt. Sehr willkommen ist die Neuanfertigung eines ausführlichen Sachverzeichnisses.

In einem Nachwort hat Dr. Roth diejenigen Probleme angeführt, die er der Aufmerksamkeit der Fachgenossen in der Industrie und an den Hochschulen besonders empfiehlt. Schon allein diese kurze Zusammenstellung läßt deutlich erkennen, wie innig der Verfasser der „Hochspannungstechnik“ mit der Forschung und Entwicklung dieses Gebietes, welches er durch sein eigenes Wirken weitgehend gefördert hat, verbunden ist.

Abschließend sei festgestellt, daß die „Hochspannungstechnik“ in der vorliegenden dritten Auflage zahlreiche neue Freunde erwerben wird und es besteht kein Zweifel, daß die Neuauflage dieses Werkes zu den wertvollsten Erscheinungen der elektrotechnischen Literatur der letzten Jahre zählt.

W. Gauster, Raleigh, USA.

Tunnelbaugeologie. Die geologischen Grundlagen des Stollen- und Tunnelbaues. Von J. Stini. Mit 192 Textabb., XI, 366 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. Geb. S 127.—, sfr. 38.20, \$ 8.80, DM 36.90.

Über die besonders innigen Beziehungen zwischen Tunnelbau und Geologie gab es bisher nur einzelne kürzere Darstellungen in einschlägigen Werken, die überdies alle seit langem vergriffen sind. Um so mehr ist es zu begrüßen, wenn nunmehr einer der ersten Vertreter der Ingenieurgeologie diesen Zusammenhängen ein ausführliches Buch gewidmet hat, das gerade die eigentlichen geologischen Voraussetzungen in den Vordergrund der Betrachtung stellt, also die Auswirkung von Gesteinsbeschaffenheit und Lagerung auf die Tunnelröhre. Diese Kleingeologie ist gleichzeitig die Voraussetzung für die Gewinnungsverfahren (besonders Bohren und Sprengen), die ja besonders von dem Zustand eines Gesteins, seiner Klüftigkeit, Zerpressung, Frische usw. abhängen. Diese Umstände bedingen die Vortriebsgeschwindigkeit, den unfreiwilligen Mebrausbruch und die Standfestigkeit. Wärme und Wasserverhältnisse und ihre möglichst zutreffende Vorhersage bilden den Inhalt weiterer Abschnitte. Den Kern des ganzen Buches stellt natürlich der Fragenkomplex des Gebirgsdruckes dar. Abweichend von älteren, allzu leicht verallgemeinernden und gerade darum nicht allgemein zufriedenstellenden Vorstellungen vom Wesen des Gebirgsdruckes versucht der Verfasser, die verwickelte Frage in Teilerscheinungen aufzulösen und unterscheidet einen Überlagerungs- und einen Wanderdruck, dann einen Gebirgsdruck im engeren Sinne und schließlich einen Umwandlungs- und Auflockerungsdruck. Im besonderen Einzelfalle entsteht dann aus solchen Komponenten der tatsächliche, der „wirksame Bergdruck“, mit dem sich der Tunnelbauer auseinanderzusetzen hat. Unter sorgfältiger Abwägung der einzelnen bedingenden Einflüsse ist es durchaus möglich, diesen Druck annähernd zu schätzen; eine verlässliche Berechnung steht allerdings noch aus. Die Anpassung der verschiedenen Bau- und Vortriebsweisen an diese Druckverhältnisse und viele Sonderausführungen (Druckstollen für Wasserkraftwerke, Luftschutzzollen usw.) werden in weiteren Abschnitten ausführlich behandelt, stets mit vielen meist vereinfachten Skizzen aus den reichen Erfahrungen des Verfassers und mit den erforderlichen Schrifttumsnachweisen. Das Buch stellt eine unentbehrliche Ergänzung zu den rein technischen Handbüchern des Tunnelbaues dar.

A. Kieslinger, Wien.

Praktische Funktionenlehre. Von F. Tölke. Erster Band: Elementare und elementare transzendente Funktionen. Zweite, stark erweiterte Auflage. Mit 178 Textabb., 50 durchgerechneten Beispielen und einer Ausschlagtafel, XI, 440 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. Geb. DM 39.—.

Die ursprünglich als 2. Band gedachten Abschnitte „Elementare und elementare transzendente Funktionen, Oberstufe“, denen die Behandlung der Funktionen im Komplex vorbehalten war, sind in der neuen Auflage weggeblieben. Nach Meinung des Verfassers sind nämlich große Teile dieses Stoffes in dem inzwischen erschienenen Buch von Betz über konforme Abbildungen so eingehend behandelt, daß eine Wiederholung unterbleiben kann. Dadurch konnte aber für Anwendungen der partiellen Differential- und Integralgleichungen Platz geschaffen werden, was von den praktisch tätigen Physikern und Technikern sehr begrüßt werden wird. Wichtige Probleme aus der Festigkeitslehre, Hydrodynamik und Wärmelehre, z. B. Platten, Membranen, Torsion homogener Stäbe, hydraulische Stöße in Leitungen, Wassersprung in offenen Leitungen, Temperaturfelder und Diffusion, sind geradezu griffbereit zur praktischen Anwendung bereitgestellt. Erwähnenswert sind ferner ein Abschnitt über die Summierung von Reihen und eine Tafel der zonalen Kugelfunktionen sowie ihrer Ableitungen und Integrale.

Der aus der ersten Auflage bekannte Teil des Buches spricht für sich selbst. Im ganzen liegt somit eine ausgezeichnete Darstellung der praktischen Funktionentheorie vor, die die Anwendung wissenschaftlicher Methoden in der Praxis nicht nur wesentlich erleichtert, sondern neben den bekannten Werken von Jahnke und Emde, Madelung usw. geradezu unentbehrlich ist.

F. Magyar, Wien.

Diagramme, Einflußlinien und Momente für Durchlaufträger und Rahmen. Von W. Valentin. Mit 55 Textabb. und 64 Tafeln, 67 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 72.—, sfr. 24.50, \$ 5.70, DM 24.—.

Die ersten Abschnitte bringen ausführlich die theoretischen Grundlagen im Sinn des Drehwinkelverfahrens bei feldweise konstantem Querschnitt. Auf diese Weise erzielt der Verfasser

eine einheitliche Behandlung des Durchlaufträgers und des eingeschoßigen Rahmens bei waagrecht festgehaltenem Riegel, wobei die unbelasteten Stabzüge mittels Rekursion durch die Ersatzsteifigkeiten und Momentfortpflanzungszahlen der an die Laststelle anschließenden Felder vertreten werden. Die Einflußlinien der Biegemomente, Quer- und Auflagerkräfte werden als Biegelinien mit einer der gesuchten Schnittkraft entsprechenden Singularität im Aufpunkt abgeleitet. Die Zahlentafeln und Diagramme bringen übersichtlich die Hilfswerte für die praktische Berechnung, so daß Zustands- und Einflußlinien solcher Tragwerke mit geringem Arbeitsaufwand bestimmt werden können. Die Benutzung der Diagramme bietet gegenüber den bekannten Angerschen Tafeln die Vorteile der leichteren Interpolation und vollständige Freiheit in den Verhältnissen der Stützweiten. Dem steht jedoch die durch Ablesung aus dem Diagramm verminderte Genauigkeit gegenüber, die aber zumindest für Vorberechnungen stets ausreicht. Bei erhöhten Ansprüchen an die Genauigkeit steht jedoch immer der Weg über die ebenfalls angegebene Formel offen. Die Einflußlinien für die Feldmomente werden meist besser aus jenen für die Stützmomente abgeleitet; dafür wäre bei künftigen Auflagen auch die Behandlung eines waagrecht nicht festgehaltenen Rahmenriegels wünschenswert.

Abschließend gibt das Buch auch Diagramme zur Berechnung der im „Anger“ behandelten Zwei- und symmetrischen Drei- und Vierfeldträger für feldweise Gleichlasten. Hierbei werden jeweils jene Stütz- und Feldmomente angegeben, die für den betreffenden Belastungsfall kennzeichnend sind. Ihre Rückführung auf die zugehörige Stützweite wird angenehm empfunden.

Das für die Bedürfnisse des praktisch tätigen Statikers zugeschnittene Buch weist gute drucktechnische Ausstattung auf.

W. Mudrak, Graz.

The Growth of Scientific Ideas. Von W. P. D. Wightman. Mit VIII Bildtafeln, 35 Textabb., XII, 495 S. Edinburgh-London: Oliver and Boyd. 1950. Geb. 25 s. net.

Dieses Buch ist keine Geschichte der Naturwissenschaften und der hierbei zutage geförderten Ideen, wohl aber eine Anleitung zum Studium der Art und Weise, in der wissenschaftliche Gedanken entstehen, sich durchsetzen, sich erhalten oder widerlegt und verdrängt werden. Diese Entwicklung kann natürlich nur verfolgt werden an einigen herrschenden Ideen und deren Wandlungen von der Antike angefangen bis in die neueste Zeit. Hierbei wird getrachtet, die Probleme so zu beschreiben und zu würdigen, wie sie den führenden Denkern des betreffenden Zeitalters erschienen sind; das Wesen der angestrebten Lösungen wird herausgeschält und abgeschätzt, welcher Wahrheitsgehalt ihnen, befreit von den psychologischen Einflüssen der Vergangenheit, heutigentags noch zukommt. Hierbei gelingt es dem Verfasser, den Gang der Naturwissenschaft durch die Jahrhunderte überaus spannend darzustellen als einen Kampf einander widerstrebender Gedanken im Ringen des Menschen um Erkenntnis. Von Zitaten aus zeitgenössischen Werken wird im allgemeinen abgesehen, dafür kommen die großen Denker auf dem Gebiete der Naturforschung mit ihren eigenen Worten reichlich zur Geltung, so daß der Leser mit ihnen in direkten Kontakt kommt und imstande ist, die jeweils angewendeten Methoden und erstrebten Ziele richtig zu erfassen. Von der Erörterung gegenwärtig bestehender Streitfragen auf dem Gebiete der Physik und Biologie wird abgesehen; es ist nicht die Absicht des Verfassers, etwa eine „up to date story“ der exakten Wissenschaften zu schreiben, vielmehr will er im Fachmann Verständnis für geschichtliche Entwicklung wecken, auf daß er selbst sein Werk fruchtbarer und sinnvoller gestalte.

E. F. Petritsch, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

Unter Mitwirkung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

herausgegeben von **J. Radon**, Wien

Schriftleitung: **N. Hofreiter**, Wien

Soeben erschienen:

55. Band, 1. Heft

(Ausgegeben im Februar 1951)

Mit 2 Textabbildungen. 104 Seiten. DM 17.60, \$ 4.20, sfr. 18.—

Inhalt: **Arens, R.** Operations Induced in Function Classes. — **Knödel, W.** Über Zerfällungen. — **Müller, H. R.** Die Bewegungs-geometrie auf der Kugel. — **Böheim, H.** Krümmungskreise und Evoluten reeller Kegelschnitte bei Cayley-Kleinscher Metrik. — **Hohenberg, F.** Logarithmische Spiralen im komplexen Gebiet. — **Knödel, W.** Sätze über Primzahlen. — **Wunderlich, W.** Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken. — **Gröbner, W.** Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout.

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch**, Graz, und **Hans Thirring**, Wien

Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

Soeben erschienen:

4. Band, 2.—3. Heft. Festheft Hans Benndorf

(Ausgegeben im Dezember 1950)

Mit 56 Textabbildungen. 172 Seiten. DM 21.—, \$ 5.—, sfr. 21.70

Inhalt: **Székely, A.** Benndorf achtzig Jahre alt. — **Heinrich G.** und **A. Klemenc**, Zur Behandlung der Diffusionsvorgänge in der Atmosphäre. — **Fiebig, M.** Beitrag zur Bestimmung der Elektronendichte in einer Gasentladung bei niederem Druck. — **Lednegg, E.** und **P. Urban**, Über einige Ergebnisse aus der Theorie gekoppelter elektromagnetischer Hohlräume. — **Lednegg, E.** und **P. Urban**, Über die Verlustwinkelbestimmung von Materialien mit hoher Dielektrizitätskonstante. — **Jäger, L.** Ein lichtelektrisch gesteuerter Fallbügelschreiber. — **Tomiser, J.** Optische Untersuchungen von Blutlösungen. — **Oswatitsch, K.** Die Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Überschallgebiete. — **Blaha, F.** Über Seignettesalzpräparate, die unter hohem Druck aus Kristallplatten gepreßt wurden. — **Biegelmeyer, G.** Ein Beitrag zur klassischen Diffusionstheorie. — **Rieder, W.** Der Szilard-Chalmers-Effekt mit langsamen und schnellen Neutronen. — **Funk, P.** Über das Newtonsche Abbildungsgesetz in der Elektronenoptik. — **Koch, K. M.** Bemerkungen zur „Keim“-Theorie der Supraleitung. — **Smekal, A.** Über die Spaltbarkeit von Kristallen. — **Stetter, G.** und **H. Thirring**, Hertha Wambacher †.

Geologie und Bauwesen

Zeitschrift für die Pflege der Wechselbeziehungen zwischen Geologie,
Gesteinkunde, Bodenkunde usw. und sämtlichen Zweigen des Bauwesens

Herausgegeben von **J. Stiny**, Wien

Soeben erschienen:

Jahrg. 18, Heft 1

(Abgeschlossen im November 1950)

Mit 17 Textabbildungen. 64 Seiten. DM 10.—, \$ 2.40, sfr. 10.50

Inhalt: **Blutritschan, K.** Flußbaugeologische Karte der Enns. — **Seelmeier, H.** Über die Baugrunduntersuchung an Flußkraftwerken. — **Süni, J.** Baugelogische Randbemerkungen zum neuzeitlichen Talsperrenbaue. — **Stratil-Sauer, G.** Einige Vorbemerkungen zur Theorie der Erosion. — **Schmidt, W.** Über Verwitterungserscheinungen bei Mergeln und Tonschiefern der Flyschzone von Scheibbs. — **Süni, J.** Haben Kluftmessungen in Lockermassen Sinn? — **Müller, L.** Der Kluftkörper.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Soeben erschienen:

Grundlagen der Architekturtheorie

Von

Karl F. Wieninger

Dipl.-Ing., Architekt, Wien

Mit 64 Textabbildungen. VII, 269 Seiten. Lex.-8°. 1950

DM 20.—, \$ 4.80, sfr. 20.80

So merkwürdig es klingen mag: die Grundfrage der Architektur, worauf überhaupt die Wirkung der Baukunst beruhe und was sie in ihrem innersten Wesen sei, ist bis heute ohne befriedigende Antwort geblieben. Gemessen an dem Fortschritt der Nachbarwissenschaften, der Geschichte der Mathematik, der Psychologie usw., ist die Architekturtheorie seit der Antike kaum vorwärts gekommen. Hier liegt ein mit Mut und Originalität unternommener Versuch vor, die wissenschaftlichen Grundlagen der Architektur im Lichte moderner Anschauung neu zu gestalten. Dieses Buch enthält eine Fülle tieferschürfender Gedanken, die nicht nur dem künstlerisch schaffenden Architekten nützliche Hinweise bringen, sondern alle gebildeten Kreise, die an den geistigen Auseinandersetzungen unserer Zeit Anteil nehmen, ansprechen.

Vor kurzem erschienen:

Grundlagen der höheren Geodäsie

Von

Dr. phil. Friedrich Hopfner

Professor der höheren Geodäsie und sphärischen Astronomie, Wien

Mit 26 Textabbildungen. VIII, 246 Seiten. 1949

DM 25.—, \$ 7.50, sfr. 32.60; geb. DM 27.—, \$ 8.10, sfr. 35.20

„... Dieses Buch zeichnet sich vor allem durch seine klare Sprache aus, mit der die wirklich schwierige Materie geboten wird. Unmerklich wird der Leser an die großen Probleme der höheren Geodäsie herangeführt, so daß er förmlich überrascht ist, wenn er sich inmitten der schwierigsten Kapitel befindet. Dies gelingt dem Verfasser durch den logischen Aufbau und sparsamste Anwendung von mathematischen Formeln. Das Buch gewinnt damit nicht nur für den Geodäten, sondern vor allem für den Kollegen verwandter Wissenschaften, der sich für die mathematische und physikalische Erdmessung interessiert, an ganz besonderer Bedeutung... Am Schluß des Studiums des Buches ist man förmlich gefesselt von dem gebotenen Stoff“.

Petermanns Geographische Mitteilungen, Braunschweig

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers

Von

Karl Federhofer

o. Professor an der Technischen Hochschule, Graz

In drei Teilen

Soeben erschienen:

I. Teil: **Statik**

165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabbildungen. VI, 130 Seiten. 1950

DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

„... Es ist erfreulich, wenn ein bewährter Lehrer und Fachmann auf dem Gebiete der Mechanik wie Prof. K. Federhofer darangeht, aus der großen Zahl mechanischer Probleme eine mit viel Vorbedacht ausgewählte Reihe zu veröffentlichen... Die Originalität sowie die kurze prägnante Form der Aufgaben und Lösungen sind geeignet, den Studierenden zu physikalischem Denken zu erziehen. Das Buch kann nur bestens empfohlen werden“.

Maschinenbau und Warmewirtschaft, Wien

Demnächst erscheinen:

II. Teil: **Kinematik und Kinetik des Punktes.** 113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabbildungen. Etwa 130 Seiten. 1951.

III. Teil: **Kinematik und Kinetik starrer Systeme.** 149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 192 Textabbildungen. Etwa 140 Seiten. 1951.

Soeben erschien:

Der heutige Stand der Massencementtechnik. Von Dipl.-Ing. Dr. J. Fritsch, Wien. Mit 15 Textabbildungen. 37 Seiten. 1950. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 19.)

DM 2.40, \$ —.60, sfr. 2.50

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria